

ELEMENTARY
INTRODUCTION
TO THE QUALITATIVE
THEORY AND THEORY
OF BIFURCATIONS
OF THE DYNAMICAL
SYSTEMS

V. N. BELYKH

The basic concepts of two-dimensional dynamic systems qualitative theory are presented. The problem of one-dimensional maps cycles is discussed. The aim of this paper is to promote students and teachers interest in the complicated mathematical theory under discussion.

Рассматриваются основные вопросы качественной теории двумерных динамических систем в элементарном изложении. Приводятся основные сведения о циклах одномерных отображений. Цель статьи – вызвать интерес у школьников и учителей к этой сложной математической теории.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В КАЧЕСТВЕННУЮ ТЕОРИЮ И ТЕОРИЮ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Н. БЕЛЫХ

Волжская государственная академия водного транспорта,
Нижний Новгород

ВВЕДЕНИЕ

Наша конечная цель – познакомиться с основами математической теории хаоса в динамических системах без случайных воздействий. Явление динамического хаоса в настоящее время обнаруживают практически во всех областях знаний, где возможно математическое моделирование, ему посвящено огромное число научных статей, книг и отдельных международных журналов, таких, как “Chaos”. Ясно, что представить сложную математическую теорию, не углубляясь в математику, даже в самом элементарном изложении, – задача не простая, и одной статьи здесь недостаточно. Поэтому разговор о самом явлении хаоса мы будем вести и дальше, а здесь будет представлено введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем, составляющих основу языка, на котором говорят современные специалисты по хаотической динамике в различных областях знаний.

Любые системы, состояние которых изменяется во времени, называют динамическими. В математике под динамическими системами понимаются дифференциальные уравнения и отображения.

Это не случайно, поскольку в математике большинство уравнений динамики как фундаментальных – Ньютона и Гамильтона в механике и Максвелла в электродинамике, – так и феноменологических, например Ходжкина–Хаксли в биофизике нейрона, Лотки–Вольтера в экологической задаче хищник–жертва и Леонтьева в модели развивающейся экономики, записываются в форме дифференциальных уравнений, а компьютерные представления последних – в форме разностных уравнений, то есть отображений.

Основы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем были заложены в трудах великого французского ученого Анри Пуанкаре, который первым понял, что можно, не интегрируя дифференциальных уравнений, представить все основные качественные особенности поведения его решений.

Мы рассмотрим простейшие динамические системы: системы дифференциальных уравнений второго порядка и одномерные отображения, а затем в

качестве предисловия к следующей статье обсудим возможности применения представленной информации к теории хаоса.

К сожалению, даже в популярной форме ответить на вопрос о том, что такое хаос в динамической системе и как он возникает, невозможно без основных понятий из теории дифференциальных уравнений и отображений. Поэтому наберемся терпения и постараемся освоить азы теории динамических систем. Зато потом это окупится: разобравшись в азах, мы сможем понять главное о хаосе.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с самого простейшего уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda). \quad (1)$$

Слева в этом уравнении – производная по времени (независимой переменной), справа – непрерывная гладкая функция переменной x и постоянного параметра λ . Решить уравнение (1) означает найти функцию

$$x = S(t, x_0, \lambda), \quad (2)$$

которая при подстановке в (1) обращает это уравнение в тождество. Величина x_0 в (2) есть начальное условие, удовлетворяющее соотношению

$$x_0 = S(0, x_0, \lambda).$$

Константа $x = c$ обращает производную в нуль, и если она одновременно служит решением уравнения

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (3)$$

то $x = c$ есть решение уравнения (1), называемое состоянием равновесия.

Теперь если $F > 0$, то $x(t)$ возрастает, а если $F < 0$, то $x(t)$ убывает в силу (1). В этом вся динамика уравнения (1): корни уравнения (3) – состояния равновесия C_1, C_2, \dots , а на интервалах (C_i, C_{i+1}) происходит либо рост, либо убывание $x(t)$ в зависимости от знака F (скорости). Рис. 1 иллюстрирует изменение $x(t)$, указанное стрелками.

Состояния равновесия C_1 и C_3 устойчивы, а C_2 неустойчиво. На рис. 1 видно, что если производная $F'_x(C) < 0$, то состояние равновесия устойчиво, а если $F'_x(C) > 0$, то неустойчиво.

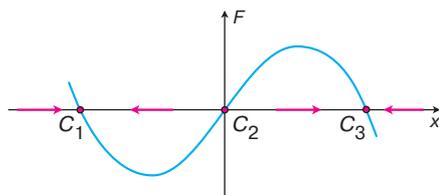


Рис. 1

Следует заметить, что аналитически решения уравнения (1) можно представить в виде неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{F(x, \lambda)} = t + c.$$

Однако для качественного анализа этот интеграл не нужен, более того, такие интегралы, как правило, не берутся.

Пример 1. Линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad (4)$$

имеет решение $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, определяющее экспоненциальный рост (убывание), если $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) соответственно. Вспомним, что уравнение (4) определяет динамику цепной реакции ($\lambda > 0$) и распада ядра ($\lambda < 0$). Единственное состояние равновесия уравнения (4) $x = 0$ устойчиво при $\lambda < 0$ и неустойчиво при $\lambda > 0$.

Пример 2. Нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - x^2 \quad (5)$$

имеет два состояния равновесия при $\lambda > 0$ и не имеет состояний равновесия при $\lambda < 0$ ($dx/dt < 0$ всюду и $x(t)$ убывает всегда). Правильность этого утверждения легко проверить, нарисовав график $F(x) = \lambda - x^2$ и расставив стрелки, как на рис. 1. Значение $\lambda = 0$ в этом примере соответствует бифуркации рождения (гибели) двух состояний равновесия с ростом λ (при убывании λ) соответственно. Важнейшее понятие – бифуркация – было введено в конце прошлого века Анри Пуанкаре.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, \lambda) \end{aligned} \quad (6)$$

с непрерывными гладкими функциями F_1 и F_2 , зависящую от параметра λ , решения которой есть система двух функций

$$\begin{aligned} x &= S_1(t, x_0, y_0, \lambda), \\ y &= S_2(t, x_0, y_0, \lambda). \end{aligned} \quad (7)$$

Плоскость (x, y) для дифференциальных уравнений (6) называют *фазовой плоскостью*, а график функции (7) как параметрически заданной кривой (параметр – время t) – *траекторией*. Траектории пересекаться не могут по теореме единственности решения (7) с заданной начальной точкой. Изменяя начальную точку (x_0, y_0) , получаем семейство траекторий на фазовой плоскости, которое с отмеченным стрелками направлением изменения точки (7) при увеличении времени образует фазовый портрет

системы (6). Состояния равновесия системы (6) аналогично уравнению (1) определяются системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x, y, \lambda) &= 0, \\ F_2(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Пример 3. Линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma y, \end{aligned} \quad (9)$$

составленная из двух независимых уравнений первого порядка вида (4), очевидно, имеет решение

$$x = x_0 e^{\lambda t}, \quad y = y_0 e^{\gamma t}. \quad (10)$$

Состояние равновесия $O(0, 0)$ может быть трех типов:

- а) при $\lambda < 0, \gamma < 0$ точка O – устойчивый узел;
- б) при $\lambda > 0, \gamma > 0$ точка O – неустойчивый узел;
- в) при $\lambda < 0, \gamma > 0$ (или $\lambda > 0, \gamma < 0$) состояние равновесия O называют *седлом*.

Фазовые портреты в этих трех случаях изображены на рис. 2.

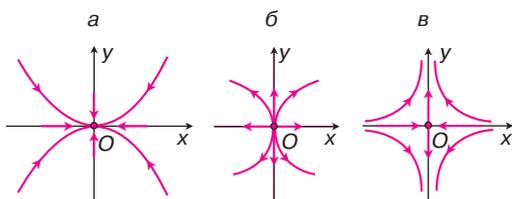


Рис. 2

Заметим, что состояния равновесия являются отдельными траекториями, так что пересечения, реализующиеся для системы (9) и изображенные на рис. 2, суть не пересечения траекторий, а пересечения так называемых интегральных кривых, составленных из трех траекторий, одна из которых – состояние равновесия.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \lambda\rho, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \quad (11)$$

заданную в полярных координатах (φ, ρ) , связанных с декартовой системой координат формулами $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, где φ – угол, ρ – полярный радиус, λ и ω – параметры. При этом, очевидно, $\rho \geq 0$.

Снова уравнения в (11) независимы, и мы имеем решение

$$\rho = \rho_0 e^{\lambda t}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (12)$$

где (φ_0, ρ_0) – начальная точка. Состояние равновесия $\rho = 0$ (в декартовых координатах это $O(0, 0)$) есть устойчивый (неустойчивый) *фокус* при $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) соответственно. Фазовые портреты для этих случаев изображены на рис. 3.

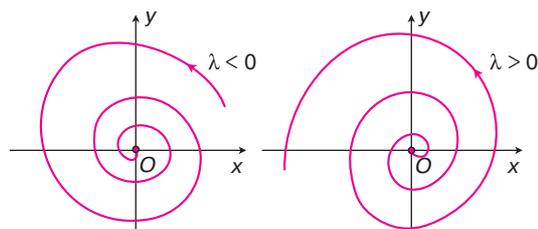


Рис. 3

Заметим, что к системе (11) (при $\lambda < 0$) приводит задача о затухающих колебаниях маятника или колебательного контура (по поводу последнего см., например, мою статью в последнем издании “Физической энциклопедии”, т. 2). При этом полярный радиус есть экспоненциально убывающая амплитуда, угол φ – полная фаза, а ω – частота колебаний.

Пример 5. Нелинейная система в полярных координатах

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(\lambda - \rho), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (13)$$

с разделенными переменными исследуется с помощью рис. 1 с важной особенностью: устойчивое состояние равновесия $\rho = \lambda > 0$ первого уравнения соответствует замкнутой траектории системы (13) на плоскости (x, y) , называемой *предельным циклом*. При $\lambda < 0$ $d\rho/dt < 0$ и цикл отсутствует (рис. 4).

Предельный цикл был введен А. Пуанкаре, впрочем как и все основные понятия качественной

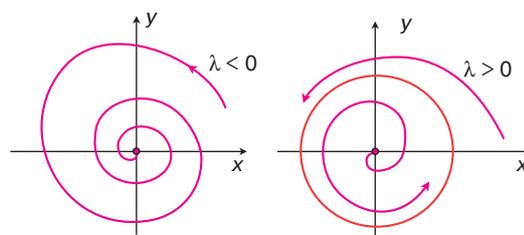


Рис. 4

теории динамических систем, предмет которой — не интегрируя систему (6), нарисовать ее фазовый портрет и проследить за его изменениями при изменении параметров (предмет теории бифуркаций). В 30-е годы предельный цикл был интерпретирован как математический образ автоколебаний А.А. Андроновым, основателем Нижегородской школы нелинейной теории колебаний. К уравнениям (13) в простейшем случае приводит задача о колебаниях томпсоновского (лампового) генератора. Возникновению колебаний соответствует бифуркация рождения цикла из состояния равновесия (рис. 4), открытая в 30-е годы Андроновым и обобщенная в начале 40-х годов Хопфом на случай систем дифференциальных уравнений более высокого порядка.

Пример 6. Нелинейная система

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(\lambda - (\rho - 1)^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (14)$$

при $|\lambda| < 1$ имеет следующую последовательность фазовых портретов: при $\lambda < 0$ производная $d\rho/dt$ отрицательна и система (14) имеет устойчивый фокус, как и в примере 5; при $\lambda = 0$ $d\rho/dt$ обращается в нуль при $\rho = 1$, то есть в системе происходит рождение предельного цикла. Траектории приближаются к нему снаружи и удаляются от него внутри. Поэтому такой цикл называют полустойчивым. При $\lambda > 0$ этот цикл разваливается на два цикла: один — устойчивый снаружи и другой — неустойчивый внутри. Стало быть, имеет место бифуркация рождения двух циклов через появление полустойчивого цикла. Проанализировать эту бифуркацию можно с помощью исследования первого уравнения в (14) при использовании рис. 1.

Пример 7. Система вида

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(1 - \rho), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda - \sin\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

при $|\lambda| < 1$ помимо неустойчивого состояния равновесия $O(0, 0)$ имеет два состояния равновесия $P_1(\rho_1 = 1, \varphi_1 = \arcsin\lambda)$ и $P_2(\rho_2 = 1, \varphi_2 = \pi - \arcsin\lambda)$. Точка P_1 есть устойчивый узел, а P_2 — седло. При $|\lambda| = 1$ состояния равновесия P_1 и P_2 сливаются, образуя так называемый седло-узел, исчезающий при $|\lambda| > 1$. Поскольку при $\lambda > 1$ производная $d\varphi/dt > 0$ (при $\lambda < -1$ $d\varphi/dt < 0$), то есть угол $\varphi(t)$ растет, система (15) имеет устойчивый предельный цикл. Последовательность изменения фазовых картин в этом случае изображена на рис. 5. На рисунке видно, что при $\lambda = 1$ система (15) имеет траекторию Γ , выходящую из седла-узла и возвращающуюся в него же. Такие траектории Пуанкаре назвал гомоклиническими. Как оказалось впоследствии, такие траек-

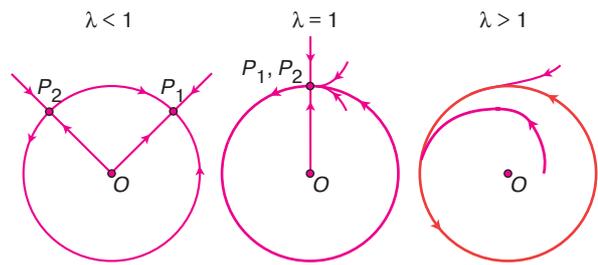


Рис. 5

тории играют важнейшую роль в теории хаоса в многомерных динамических системах без случайных воздействий.

Таким образом, мы получили бифуркацию рождения предельного цикла в ситуации, когда исчезает седло-узел, имеющий гомоклиническую траекторию.

Пример 8. Пусть нелинейная система (6) в квадрате $Q = (|x| \leq d, |y| \leq d)$ совпадает с линейной системой (9) и имеет в нем фазовый портрет, соответствующий седлу (рис. 2, в) при $\lambda < 0, \gamma > 0$, а вне этого квадрата имеет фрагмент фазового портрета, изображенный на рис. 6.

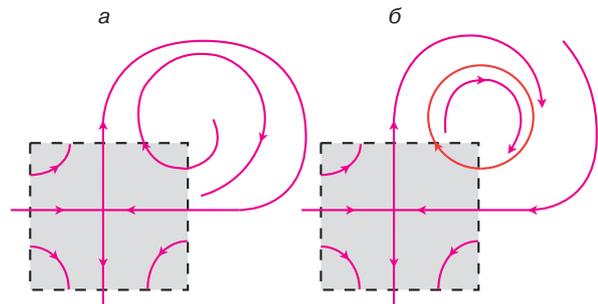


Рис. 6

В этом случае (при некотором $\lambda = \lambda_\Gamma$) существует гомоклиническая траектория Γ , выходящая из седла и возвращающаяся в него же при $t \rightarrow \infty$. Тот факт, что для $|\lambda| > \gamma$ при изменении λ , скажем, в сторону $\lambda > \lambda_\Gamma$ происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла (рис. 6, б), был изучен А.А. Андроным и Е.А. Леонтович в начале 50-х годов.

Мы привели частные примеры, которые с помощью уравнения первого порядка объясняют различные случаи изменения фазовых портретов системы двух уравнений при изменении параметра. Но, оказывается, эти примеры отражают общую ситуацию качественного изменения фазовых картин любой динамической системы (6), поскольку все главные деформации системы (6) общего вида (со сколь угодно сложными гладкими функциями F_1 и F_2)

происходят только так, как в наших примерах. Говоря “главные деформации”, мы имеем в виду, что если в системе (6) рождается сразу много состояний равновесия или предельных циклов, то малыми изменениями F_1 и F_2 это рождение можно разделить на последовательность элементарных бифуркаций, происходящих по схеме, указанной примерами 2, 5–8, то есть путем поочередного рождения пар состояний равновесия (пример 2) и предельных циклов либо через бифуркацию Андронова–Хопфа (пример 5), либо через бифуркацию полуустойчивого цикла (пример 6), либо через бифуркацию гомоклинической траектории седло-узла (пример 7) или седла (пример 8). Других элементарных бифуркаций в диссипативных системах не бывает. Так что наши примеры не являются частными, а системы, рассмотренные в них, как отражающие общие бифуркационные свойства называют нормальными формами.

Приведем теперь несколько важнейших понятий теории динамических систем общего характера.

Первое. Все сказанное относится к так называемым диссипативным системам (исключая, конечно, тривиальные случаи линейных систем типа (1)), траектории которых при $t \rightarrow \infty$ не уходят в бесконечность, а стремятся к ограниченному предельному множеству, называемому *аттрактором*. Легко проанализировать, что таким множеством в случае системы (6) могут быть состояния равновесия и предельные циклы.

Второе общее понятие, важнейшее в теории динамических систем, — это понятие грубости (или структурной устойчивости), введенное в конце 30-х годов А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным и играющее центральную роль в современной теории динамических систем. Смысл этого понятия состоит в следующем. Если при малом изменении параметров системы (6) или целиком правой части (функций F_1, F_2 и их производных) вид фазового портрета топологически остается тем же самым, то система называется грубой. Из примеров следует, что качественные изменения фазовых портретов происходят при бифуркациях состояний равновесия (примеры 2 и 5), предельных циклов (примеры 5–8) и гомоклинических траекторий (примеры 7 и 8).

Третий общий вывод состоит в том, что хаоса, то есть явления, когда решение системы дифференциальных уравнений (6) ведет себя как случайная функция, в системах второго порядка не бывает.

Заметим, что в математической теории систем второго порядка существует множество нерешенных задач. Достаточно упомянуть о 16-й проблеме Гильберта (ее второй части) о числе предельных циклов в зависимости от порядка полиномов в правой части системы (6). По решению этой проблемы в последние годы получено много интересных результатов, но проблема остается нерешенной.

ОДНОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Используемые в математике последовательности действительных чисел $x(0), x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$, рассматриваемые как функция дискретного аргумента $x(n): Z \rightarrow R$, могут задаваться уравнением

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (16)$$

связывающим последующее значение $x(n+1)$, обозначаемое обычно \bar{x} , с предыдущим $x(n)$, обозначаемым просто x . Уравнение (16) называется *разностным* и, когда под n понимают дискретное время, представляет собой динамическую систему. Последовательность $x(0), x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$ называют траекторией, удовлетворяющей начальному условию $x(0)$. Иначе говоря, мы имеем функцию $f: R^1 \rightarrow R^1$, отображающую действительную ось в себя, поэтому уравнение (16) $\bar{x} = f(x)$ называют также *одномерным отображением*. Действие отображения f геометрически изображают с помощью диаграммы Ламерея (рис. 7), на которой отрезками изображают переход от аргумента $x(n)$ к значению функции $x(n+1)$ и указывают переход от значения функции к новому значению аргумента (через биссектрису). Итак, мы представили простейшую динамическую систему как объект, доступный любому старшекласснику.

Пример 9. Арифметическая прогрессия задается отображением сдвига

$$x(n+1) = x(n) + d, \quad (17)$$

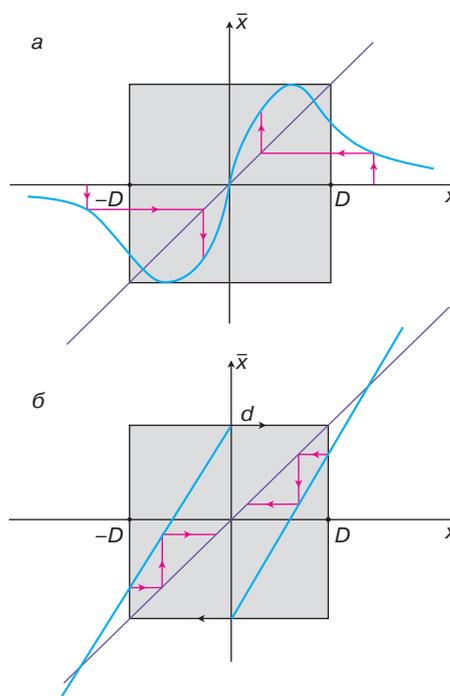


Рис. 7

где начальное условие $x(0)$ есть ее первый член, а константа d – ее разность.

Пример 10. Геометрическая прогрессия со знаменателем q задается отображением сжатия ($|q| < 1$) или растяжения ($|q| > 1$) вида

$$\bar{x} = qx. \quad (18)$$

Нуль является *неподвижной точкой отображения* (18) как решения уравнения $x = qx$. При $|q| < 1$ эта точка устойчива: к ней стремятся точки траекторий, а при $|q| > 1$ она неустойчива: точки траекторий от нее удаляются. Заметим, что нулевой первый член в геометрической прогрессии выбрасывается, поскольку порождает бесконечную последовательность нулей, которая для отображения (18) есть отдельная траектория – неподвижная точка.

Пример 11. Отображение вида

$$\bar{x} = qx + d \quad (19)$$

– “сжатие плюс сдвиг” – имеет неподвижную точку

$$x^* = \frac{d}{1-q}$$

как решение уравнения $x = qx + d$ и имеет такое же семейство траекторий, как и отображение (18), если перенести начало координат на диаграмме Ламерея в точку (x^*, x^*) .

Из приведенных примеров легко понять, что если функция $f(x)$ в (16) монотонно возрастает, то отображение может иметь только неподвижные точки и траектории, стремящиеся к ним или удаляющиеся от них. Если функция $f(x)$ монотонно убывает, то отображение может иметь еще и циклы периода 2, то есть траектории, удовлетворяющие условию $x_2 = f(x_1)$, $x_1 = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$. Например, в случае (18) при $q = -1$ все точки, кроме нуля, являются точками циклов периода 2. В общем случае, когда функция f может менять свою монотонность, отображение (16) может иметь циклы любого периода k , то есть траектории, удовлетворяющие условиям

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad \dots, \quad x_k = f(x_{k-1}), \\ x_{k+1} = x_1, \quad x_i \neq x_1, \quad i = 2, 3, \dots, k$$

(внутри цикла точки не могут совпадать, иначе получим цикл меньшего периода). Легко, например, получить цикл периода 3 для так называемого логистического отображения

$$\bar{x} = \lambda x(1-x), \quad (20)$$

переводящего единичный отрезок $[0, 1]$ в себя при $\lambda \leq 4$. Итак, аттрактором неважно однозначного отображения может быть предельное множество, включающее различное число циклов, в том числе и бесконечный их набор.

Известный украинский математик А.Н. Шарковский в 1964 году доказал теорему о том, что если отображение (16) имеет цикл периода 3, то оно имеет циклы всех периодов.

Теперь давайте представим себе общую картину поведения траекторий нелинейного отображения. Пусть функция $f(x)$ в (17) удовлетворяет условию

$$x > f > 0, \quad x > D; \quad x < f < 0, \quad x < -D,$$

как показано на рис. 7, а. Тогда все траектории попадают в область $|x| < D$ и остаются в ней навсегда. В случае когда в этой области существуют циклы всех периодов (а именно они составляют основу аттрактора, то есть множества, к которому стремятся все траектории отображения), то появляется чувствительность к выбору начальных условий: стоит слегка изменить начальную точку, как в финале ($n \rightarrow \infty$) траектория может оказаться в окрестности другого цикла.

Итак, мы пришли к первому признаку хаоса: изменение начальных условий влечет изменение финального поведения. Но это еще не все и не главное, поскольку периодическое движение, каким бы сложным оно ни было, обладает порядком. Для хаоса нужна неустойчивость в финальном поведении.

Пример 12. Рассмотрим отображение

$$\bar{x} = qx - d \operatorname{sign}(x), \quad (21)$$

имеющее разрыв в точке $x = 0$ и представляющее собой растяжение плюс сдвиг по обе стороны от этой точки (см. рис. 7, б). Это отображение имеет две неустойчивые неподвижные точки (считаем $1 < q < 2$)

$$x = \pm x^*, \quad x^* = \frac{d}{q-1}$$

и интервал $(-d, d)$, на который попадают все траектории из области $|x| < x^*$ и остаются на нем навсегда. Заметим, что условие $q > 1$ означает растяжение, то есть неустойчивость отображения в обеих областях непрерывности ($x < 0$) и ($x > 0$), а условие $q < 2$ принято для того, чтобы выполнять неравенство $d < x^*$ и отрезок $[-d, d]$ был притягивающим, содержащим аттрактор.

Итак, мы получили, что отображение имеет притягивающий отрезок, не имеющий внутри себя ни одной устойчивой траектории: устойчивая неустойчивость! Таким образом, отображение (21) при $1 < q < 2$ демонстрирует настоящий хаос. Я.Г. Синаю, выдающемуся российскому математику, первому удалось построить вероятностную теорию для динамических систем, простейшим представителем является (21). Вероятность в такие системы вносится через случайное распределение начальных условий. Вопрос этот непрост и требует отдельного обсуждения, тем более на элементарном уровне.

Мы закончим наше обсуждение ответом на вопрос, откуда берутся отображения как динамические системы. Во-первых, как уже упоминалось, при замене производной в (1) разностью

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(n+1) - x(n)}{h}$$

уравнение (1) сводится к отображению (16) с функцией

$$f(x(n)) = x(n) + hF(x(n)).$$

Так поступают, когда приближенно решают дифференциальные уравнения с помощью компьютера.

Второй путь получения отображений – отображения последования Пуанкаре, смысл которого в том, что для системы (6) выбирается секущая, например $y = 0$, находится время возвращения траектории, начинающейся на этой секущей, на нее же из уравнения $0 = S_2(t, x, 0, \lambda)$, и это время $\tau(x)$ подставляется в первую функцию в (7): $\bar{x} = S_1(\tau(x), x, 0, \lambda)$. Полученное выражение и есть одномерное отображение вида (16).

Пример 13. Пусть в примере 8 динамическая система (6) в квадрате Q задана линейной системой (9) с решением (10) в случае седла, то есть при $\lambda < 0$, $\gamma > 0$. Построим отображение последования Пуанкаре отрезка $p = \{x = d, 0 \leq y \leq d\}$ на полуось $p' = \{x = d, y \leq d\}$, считая, что вне квадрата Q траектории системы индуцируют отображение последования L отрезка $q = \{y = d, 0 \leq x \leq d\}$ на полуось p' вида

$$L: q \longrightarrow p', \quad \bar{y} = \mu + a_0x. \quad (22)$$

Получим отображение $T: p \longrightarrow q \longrightarrow p'$. Для этого запишем начальные и конечные условия для решения (10) в виде

$$x(0) = d, \quad y(0) = y_0, \quad d = y_0 e^{\gamma\tau}, \quad x(\tau) = x_0 e^{\lambda\tau}, \quad (23)$$

где τ – время движения по траектории от отрезка p до отрезка q . Решая совместно уравнения (22) и (23), получаем искомое отображение последования

$$\bar{y} = \mu + ay^v, \quad (24)$$

где обозначено

$$y = y_0, \quad a = a_0 d^{\frac{\lambda+\gamma}{\gamma}}, \quad v = -\frac{\lambda}{\gamma}.$$

Задача. Провести исследование отображения (24) при различных значениях параметров μ , a , v и тем самым проверить утверждение примера 8.

Рассмотренные нами вопросы более подробно освещены в научной литературе.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.
3. Динамические системы-5 / Под ред. В.И. Арнольда. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1986.

* * *

Владимир Николаевич Белых, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Волжской государственной академии водного транспорта (Нижний Новгород), заслуженный деятель науки Российской Федерации. Специалист по теории нелинейных колебаний и качественной теории динамических систем. Автор более 150 статей и одной монографии по теории динамических систем.