

# Механика-1. Кинематика материальной точки.

*Механическим движением* называется изменение положения тела по отношению к другим телам. Для описания движения необходимо определить *систему отсчета*, которая включает в себя тело отсчета, жестко связанную с ним систему координат и набор синхронизированных между собой часов. Двое часов, находящихся на расстоянии  $S$  друг от друга синхронизованы, если разность показаний часов в момент прихода светового сигнала в точку нахождения одних часов и его испускание из точки нахождения других равно  $S/c$ , где  $c$  — скорость света. *Кинематика* занимается описанием движения без выяснения его причин.

*Материальной точкой* называется тело, размерами которого при описании его движения можно пренебречь. Положение точки в момент времени  $t$  можно задать радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным к этой точке из начала координат. Выбирая единичные орты  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , жестко связанные с телом отсчета, можно записать

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Величины  $x$ ,  $y$  и  $z$  называются декартовыми координатами точки. Положение точки часто описывают также с помощью цилиндрических и сферических координат. *Цилиндрические координаты*  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  связаны с декартовыми координатами равенствами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

*Сферические координаты*  $r$ ,  $\varphi$  и  $\theta$  связаны с декартовыми координатами равенствами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

В процессе движения конец радиуса-вектора описывает пространственную кривую  $\mathbf{r}(t)$  — *траекторию*, которая может быть охарактеризована тремя функциями  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ , описывающими зависимость декартовых координат от времени.

*Путь* — длина участка траектории, пройденного точкой за рассматриваемый интервал. Путь — величина скалярная, неотрицательная и не убывающая со временем. *Перемещением* точки за период времени от  $t_1$  до  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) называется вектор  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ , соединяющий начальное положение точки с конечным.

Скорость точки равна производной от радиуса-вектора по времени:  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ . Скорость направлена по касательной к траектории. Средняя скорость за конечное время  $\Delta t$  определяется как отношение перемещения к интервалу времени:  $\mathbf{v}_{cp} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ . Движение называют *равномерным*, если скорость не зависит от времени. Равномерное движение происходит по прямой. Равномерным движением по заданной криволинейной траектории называют движение с постоянным модулем скорости. Ускорение точки равно первой производной от скорости по времени:  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ . Проекцию ускорения на направление скорости называют *тангенциальным* ускорением и обозначают  $a_\tau$ , оно определяет быстроту изменения модуля скорости и равно производной от модуля скорости:  $a_\tau = dv/dt$ . Компоненту ускорения, перпендикулярную скорости, называют нормальным ускорением и обозначают  $a_n$ , оно характеризует быстроту изменения скорости и равно  $a_n = v^2/R$ , где  $R$  — радиус кривизны траектории. Среднее ускорение за время  $\Delta t$  определяется как  $\mathbf{a}_{cp} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ . Движение называют *равноускоренным*, если ускорение не зависит от времени. Равноускоренным движением вдоль заданной траектории называют движение постоянным тангенциальным ускорением.

Движение по окружности можно описывать с помощью угловых переменных: угла поворота  $\varphi$ , угловой скорости  $\omega = d\varphi/dt$  и углового ускорения  $\epsilon = d\omega/dt$ . Если угол измерять в радианах, то длина дуги равна  $s = \varphi R$ . Отсюда следует, что

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \epsilon R, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

## Механика-2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона.

В динамике Ньютона причиной изменения скорости частицы является ее взаимодействие с другими частицами или телами. Мерой взаимодействия является сила.

**Первый закон Ньютона:** Существуют такие системы отсчета, в которых любое тело, не взаимодействующее с другими телами, движется равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, существование которых постулирует этот закон, называются *инерциальными*. Из закона сложения скоростей видно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, также является инерциальной.

Из первого закона Ньютона следует, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела возникает только в результате его взаимодействия с другими телами. Это ускорение зависит от инертности тела, а также от интенсивности и направления действия на него других тел. Масса тела  $m$  — это скалярная положительная величина, характеризирующая инертность тела.

**Второй закон Ньютона:** В инерциальных системах отсчета сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение в этой системе отсчета:

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

*Импульсом* частицы называют векторную величину, равную произведению массы частицы на ее скорость:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Другая форма записи второго закона Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

**Третий закон Ньютона:** Силы  $\mathbf{F}_{AB}$  и  $\mathbf{F}_{BA}$ , с которыми действуют друг на друга два взаимодействующих тела  $A$  и  $B$ , направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны между собой по модулю:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}.$$

## Механика-3. Динамика системы материальных точек.

### Законы сохранения.

**Определение.** Система материальных точек - это совокупность конечного их числа. Импульс системы материальных точек:  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ .

Момент импульса системы материальных точек:  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$

Сила действующая на систему материальных точек:  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , где  $\vec{F}_i = \vec{F}'_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$  внешняя сила плюс внутренняя сила которая равна 0 по 3 закону Ньютона.

Момент сил действующих на систему материальных точек:  $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$

В механике Ньютона предполагается равенство нулю момента внутренних сил, следовательно:  $\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}'_i]$

Уравнение движения системы материальных точек:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i =$

$\vec{F}$ . Центр масс:

- $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$  - радиус вектор центра масс, где  $M$  - сумма масс покоя точек.
- $\vec{V} = d\vec{R}/dt$  - скорость центра масс
- $m d\vec{R}/dt = \vec{F}$  - уравнение движения центра масс системы.

Положение точки центра масс не зависит от того, в какой системе координат оно определяется.

Уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \left[ \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times p_i \right] + \sum_i \left[ \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \\ &= \sum_i [\vec{v}_i \times \vec{p}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = 0 + \sum_i \vec{M}_i = \vec{M} = 0. \end{aligned}$$

Законы сохранения - позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о развитии процесса.

**Определение.** Система материальных точек называется изолированной, если отсутствуют внешние сил В изолированной системе  $\vec{F} = 0$ , то есть уравнение движения имеет вид  $d\vec{p}/dt = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}$ . То есть центр масс системы движется прямолинейно и равномерно. Могут также сохраняться лишь отдельные проекции импульса.

**Сохранение момента импульса:** В изолированных системах  $d\vec{L}/dt = 0$ , так же могут сохраняться лишь отдельные проекции.

**Сохранение энергии:** Запишем полную производную функции Лагранжа по  $t$ :  $\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$ , согласно уравнению Лагранжа  $\frac{dL}{dq_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$   
 $\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$  или:  $\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$  следовательно  $E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const}$  при движении замкнутой системы. Здесь  $q_i$  - обобщенные координаты.  $E$  называется энергией системы.

Можно показать, что в декартовых координатах  $E = \sum_a m_a v_a^2 / 2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$  - сумма кинетической и потенциальной энергии, здесь  $\vec{r}_a$  - радиус вектор а-й точки.

### **Законы сохранения и симметрия пространства и времени.**

- Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, в силу которой функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени  $\partial L / \partial t = 0$ .
- Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства. Однородность пространства - это эквивалентность всех точек пространства друг другу. Это значит, что если имеется некоторая изолированная физическая система, то развитие событий в ней не зависит от того, в точках какой области пространства эта система локализована, то есть если все точки системы сместить на  $\delta \vec{r}$ , то ни в состоянии системы, ни в ее внутренних движениях ничего не изменится.
- Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства, то есть с эквивалентностью различных направлений в пространстве. Это означает, что если имеется некоторая изолированная система, то развитие событий в ней не зависит от того, как она ориентирована в пространстве. То есть угловое перемещение системы на  $\delta \varphi$  не изменяет ее внутреннего состояния и ее внутренних движений

## Механика-4. Движение в центрально-симметричном поле. Законы Кеплера.

При движении в центрально-симметричном поле сохраняется энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r)$$

и момент количества движения

$$\mathbf{M} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Из закона сохранения момента количества движения следует, что  $(\mathbf{M}\mathbf{v}) = 0$ . Следовательно, частица всегда находится в плоскости перпендикулярной  $\mathbf{M}$  и проходящей через начало координат. Введем на этой плоскости полярную систему координат  $(r, \varphi)$ . Скорость частицы  $v$  можно разложить на радиальную скорость, имеющую величину  $\dot{r}$ , и перпендикулярную к ней азимутальную скорость, имеющую величину  $r\dot{\varphi}$ . Очевидно, что  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ . Для энергии и момента количества движения частицы получаем выражения

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r), \quad M = mr^2\dot{\varphi}.$$

Выражая  $\dot{\varphi}$  через  $M$ ,

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \quad (1)$$

получаем следующее выражение для энергии

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Отсюда следует, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(r)]}, \quad (2)$$

где  $U_{\text{эфф}} = U(r) + M^2/2mr^2$ . Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{M}{r^2\sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}.$$

Таким образом,

$$\varphi(r) = \int \frac{M dr}{r^2\sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}. \quad (3)$$

**Общие свойства движения в центрально-симметричном поле.** При заданной энергии  $E$  частица может находиться только в тех точках, где  $E \geq U_{\text{эфф}}(r)$ . Эти точки образуют ряд связанных областей возможных значений  $r$ , из которых частица не выходит в процессе движения. Для каждой области имеются минимальное значение  $r = r_{\text{макс}}$  и минимальное значение  $r = r_{\text{мин}}$  координаты  $r$ . Эти значения  $r$  удовлетворяют равенству  $E = U_{\text{эфф}}(r)$ . В точках с  $r = r_{\text{макс}}$  или  $r = r_{\text{мин}}$  радиальная скорость обращается в нуль. Если  $r_{\text{макс}} = \infty$ , движение называется *инфинитным*, Если  $r_{\text{макс}} < \infty$  — *финитным*. За время в течении которого  $r$  изменяется от  $r_{\text{мин}}$  до  $r_{\text{макс}}$ , радиус-вектор поворачивается на

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}.$$

Условие замкнутости траектории имеет вид  $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа. Существует лишь два типа центрально-симметричных полей для которых все финитные траектории замкнуты:  $U(r) = ar^2$ ,  $a \geq 0$  и  $U(r) = -\alpha/r$ ,  $\alpha \geq 0$ .

**Задача Кеплера.** Рассмотрим поле  $U(r) = -\alpha/r$ . Замена  $u = 1/r$  позволяет взять интеграл в (3):

$$\varphi(r) = -\arccos \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \right] + \varphi',$$

где  $e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2}$ ,  $p = M^2/m\alpha$ , а  $\varphi'$  — постоянная интегрирования. Положим  $\varphi' = 0$ ; траектории, для которых  $\varphi' \neq 0$  можно получить с помощью поворотов. Уравнение траектории теперь можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (4)$$

Это запись конических сечений в полярных координатах. При  $e > 1$  ( $E > 0$ ) имеем гиперболу, при  $e = 1$  ( $E = 0$ ) — параболу, при  $0 < e < 1$  ( $-m\alpha^2/2M^2 < E < 0$ ) — эллипс и при  $e = 0$  ( $E = -m\alpha^2/2M^2$ ) — окружность.

**Первый закон Кеплера.** Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

При изменении полярного угла на  $d\varphi$  радиус-вектор заметает площадь  $r^2 d\varphi/2$ . Следовательно, секториальная скорость есть  $\sigma = r^2 \dot{\varphi}/2$ . Из закона сохранения момента количества движения  $M = mr^2 \dot{\varphi}$  получаем, что секториальная скорость постоянна и равна  $M/2m$ .

**Второй закон Кеплера.** *Радиус-вектор планеты за равные времена описывает равные площади.*

Из (3) для декартовых координат частицы получаем выражения

$$x = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \quad y = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Таким образом,  $\sin \varphi = y/(p - ex)$  и  $\cos \varphi = x/(p - ex)$ . Тождество  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  дает

$$(x - x_0)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

где

$$a = p/(1 - e^2), \quad b = p/\sqrt{1 - e^2}, \quad x_0 = -pe/(1 - e^2). \quad (5)$$

Интегрируя секториальную скорость по промежутку времени, равному периоду  $T$ , получаем площадь орбиты  $\Sigma$ . С другой стороны, так как секториальная скорость равна  $M/2m$ , то результат интегрирования есть  $MT/2m$ . Таким образом  $\Sigma = MT/2m$ . Площадь эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  равна  $\pi ab$ . Используя (5), можно записать  $\Sigma = \pi a^{3/2} p^{1/2} = \pi a^{3/2} M/(m\alpha)^{1/2}$ . Следовательно,  $T = 2\pi a^{3/2} (m/\alpha)^{1/2}$ .

**Третий закон Кеплера.** *Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.*



## Механика-5. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа системы материальных точек. Интегралы движения.

Точки *конфигурационного пространства* лагранжевой механической системы описываются набором обобщенных координат  $q^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Точки *пространства состояний* лагранжевой механической системы описываются набором обобщенных координат  $q^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  и набором обобщенных скоростей  $\dot{q}^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Функция Лагранжа, или лагранжиан, системы — это некоторая функция  $L(q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N, t)$  обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени. В обычном случае лагранжиан — это разность кинетической и потенциальной энергий. Например, для обычной системы из  $n$  частиц имеем

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t), \quad (6)$$

где  $U$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц друг с другом и с внешними полями.

Пусть в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) система находится в конфигурациях, описываемых обобщенными координатами  $q_1^i$  и  $q_2^i$  соответственно. Согласно *принципу наименьшего действия* в промежутке времени между  $t_1$  и  $t_2$  система движется таким образом, что интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N, t) dt,$$

называемый *действием*, имеет наименьшее возможное значение (строго говоря, является стационарным). Принцип наименьшего действия приводит к уравнениям движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которые называются *уравнениями Лагранжа*. Для системы с лагранжианом (6) получаем

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; t)}{\partial \mathbf{r}_a}.$$

**Интегралы движения.** Для интегрирования уравнений Лагранжа полезно знать интегралы движения, определяемые как функции обобщенных координат и обобщенных скоростей не изменяющиеся во время движения. Рассмотрим несколько примеров.

*Энергия.* В силу однородности времени лагранжиан для замкнутой системы не зависит явно от времени. Следовательно, используя уравнения движения, можно записать

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} \ddot{q}^i \right) = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right).$$

Отсюда следует, что энергия системы

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L$$

является интегралом движения. Для лагранжиана (6), в случае, когда  $U$  не зависит от времени, получаем интеграл движения

$$E = \sum_{a=1}^n \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n).$$

*Импульс.* В однородном пространстве механической свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Рассмотрим систему из  $n$  частиц с лагранжианом  $L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t)$  и предположим, что он не меняется при преобразованиях

$$\delta \mathbf{r}_a = \delta \boldsymbol{\epsilon}, \quad \delta \dot{\mathbf{r}}_a = 0.$$

Из условия инвариантности  $L$ , используя уравнения Лагранжа, получаем

$$0 = \delta \boldsymbol{\epsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \delta \boldsymbol{\epsilon} \sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = \delta \boldsymbol{\epsilon} \frac{d}{dt} \left( \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right).$$

Так как  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$  произволен, то  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ , где  $\mathbf{P}$  — полный импульс:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}.$$

Для системы с лагранжианом (6)

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a.$$

*Момент количества движения.* В изотропном пространстве свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого в пространстве. При повороте на угол  $\delta\varphi$  вокруг оси, задаваемой единичным вектором  $\mathbf{n}$ , радиус вектор  $\mathbf{r}$  изменяется на  $\delta\mathbf{r}$ , а скорость  $\dot{\mathbf{r}}$ , где

$$\delta\mathbf{r}_a = [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}_a], \quad \delta\dot{\mathbf{r}}_a = [\delta\varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}_a], \quad \delta\varphi = \delta\varphi \mathbf{n}.$$

Из условия инвариантности лагранжиана получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}_a] + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} [\delta\varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}_a] \right) \\ &= \delta\varphi \sum_a \left( \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \right] + \left[ \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right] \right) \\ &= \delta\varphi \sum_a \left( \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right] + \left[ \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right] \right) \\ &= \delta\varphi \frac{d}{dt} \left( \sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right] \right), \end{aligned}$$

где мы использовали инвариантность смешанного произведения векторов относительно циклических перестановок и уравнения Лагранжа. В силу произвольности вектора  $\delta\varphi$  имеем  $\dot{\mathbf{M}} = 0$ , где  $\mathbf{M}$  — полный момент количества движения:

$$\mathbf{M} = \sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right].$$

Для системы с лагранжианом (6)

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a].$$

## Механика-6. Динамика абсолютно твердого тела. Тензор инерции. Уравнения Эйлера.

Твердое тело - система материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Для описание движения твердого тела вводят две системы координат: неподвижную  $XYZ$ , и движущуюся, жестко связанную с телом  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Положение твердого тела описывается заданием трех координат, описывающих положение начала подвижной системы относительно начала неподвижной и тремя углами между осями двух систем. Тогда любое движение твердого тела есть сумма параллельного переноса и поворота вокруг центра инерции. Тогда бесконечно малое смещение представляется в виде  $d\vec{r} = d\vec{R} + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$ .

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}],$$

где  $\vec{V}$  - поступательная скорость,  $\Omega$  - угловая скорость вращения. Кинетическая энергия системы материальных точек:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2} (\vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}])^2 = \sum \frac{m}{2} \vec{V}^2 + \sum m\vec{V}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \sum \frac{m}{2} [\vec{\Omega}\vec{r}]^2,$$

скорости  $\vec{V}$  и  $\vec{\Omega}$  одинаковы для всех точек следовательно  $V^2/2$  выносим за знак суммы, а  $\sum m = \mu$ . Таким образом,  $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2)$  - сумма поступательной и вращательной кинетических энергий.

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_e^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_e^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_e^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \end{aligned}$$

где использовано  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ .

$$\text{Вводим } I_{ik} = \sum m (x_e^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \Rightarrow T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k.$$

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & -\sum m xy & -\sum m xz \\ -\sum m xy & \sum m (x^2 + z^2) & -\sum m yz \\ -\sum m xz & -\sum m zy & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

- тензор инерции.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное:  $I_{ik} = \int \rho (x_e^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV$

Направления на которых  $I_{ik}$  становится диагональным - главные оси инерции, а соответствующие значения тензора - главные моменты инерции ( $I_1, I_2, I_3$ ). Следовательно  $T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$ . Поскольку твердое тело обладает 6 степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать 6 независимых уравнений. Их можно представить в виде, определяющим производные по времени от двух векторов: импульса и момента.

Вводя  $\vec{P} = \sum \vec{p} = \mu\vec{V}$  и полную силу  $\vec{F} = \sum \vec{f}$ , получим  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ .

Выберем неподвижную систему координат, такую что в данной момент времени центр инерции тела покоился относительно нее.

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\vec{r}\vec{p}] = \sum [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + \sum [\vec{r}\dot{\vec{p}}].$$

В силу сделанного выбора значение  $\dot{\vec{r}}$  совпадает со скоростью  $\vec{v}$ , поскольку  $\vec{v}$  и  $\vec{p} = m\vec{v}$  имеют одинаковые направления  $[\dot{\vec{r}}\vec{p}] = 0$ . Кроме того  $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ :  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$ , где  $\vec{K} = \sum [\vec{r}\vec{f}]$ ,  $[\vec{r}\vec{f}]$  - момент силы  $f$ .

**Уравнения Эйлера:** Пусть  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  - скорость изменения какого-либо вектора  $\vec{A}$  по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе координат  $\vec{A}$  - не изменяется, то его изменение по отношению к неподвижной системе координат обусловлено вращением:  $\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}\vec{A}]$ . В общем случае  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\Omega}\vec{A}]$ , где  $\frac{d'\vec{A}}{dt}$  - скорость изменения по отношению к подвижной системе координат. Тогда уравнения движения:  $\frac{d'\vec{P}}{dt} + [\vec{\Omega}\vec{P}] = \vec{F}$ ,  $\frac{d'\vec{M}}{dt} + [\vec{\Omega}\vec{M}] = \vec{K}$ . Спроецируем уравнения на оси координат подвижной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  и  $\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}$  и т.д.

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) = F_1 \\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) = F_2 \\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) = F_3 \end{cases}$$

Предполагая оси  $x_1, x_2, x_3$  выбранными по главным осям инерции, и  $M_1 = I_1\Omega_1$  и т.д.

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1 \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2 \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3 \end{cases}$$

- уравнения Эйлера. При свободном вращении  $\vec{K} = 0$ .

## Механика-7. Движение относительно неинерциальных систем отсчета.

В инерциальной системе отсчета:  $L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U$  - функция Лагранжа,  $m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$  - уравнение движения (везде где стоит индекс «0» величина относится к инерциальной системе отсчета). Найдем  $L$  и уравнение движения для неинерциальной системы отсчета. Считаем, что выполним принцип наименьшего действия (то есть система движется таким образом, что величина  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$  принимает минимальное значение). Здесь  $q, \dot{q}$  - обобщенные координаты и скорости. Также считаем, что в силе уравнение Лагранжа:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ .

Рассмотрим сначала систему отсчета  $K'$ , которая движется относительно инерциальной системы отсчета  $K_0$  поступательно скоростью  $V(t)$ . Для частицы в системе отсчета  $K_0$  и  $K'$ :  $\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t)$ . Тогда в системе отсчета  $K'$  получим:  $L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U$ .  $\vec{V}^2(t)$  - функция времени, следовательно, может быть представлена в виде полной производной по времени от некоторой другой функции, следовательно, можно исключить.  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ , где  $\vec{r}'$  - радиус-вектор в  $K'$ , следовательно  $m\vec{V}(t)\vec{v}' = m\vec{V} \frac{d\vec{r}'}{dt} = m \frac{d}{dt}(\vec{V}\vec{r}') - m\vec{r}' \frac{d\vec{V}}{dt}$ , подставим в функцию Лагранжа и исключим полную производную по времени:  $L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{W}(t)\vec{r}' - U$ , где  $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$  - ускорение поступательного движения  $K'$ . Тогда уравнение Лагранжа примет вид:  $m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t)$ .

Рассмотрим теперь новую систему отсчета  $K$ , которая имеет общее с  $K'$  начало, но вращается относительно нее с угловой скоростью  $\vec{\Omega}(t)$ . Тогда в  $K'$ :  $\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$ , где  $\vec{v}$  - скорость в  $K$ , а радиус-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  частицы в  $K$  и в  $K'$  совпадают. Тогда для  $L$  (в общем виде для неинерциальной системы отсчета):  $L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

Рассмотрим  $dL = m\vec{v}d\vec{v} + m d\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + m\vec{v}[\vec{\Omega}d\vec{r}] + m[\vec{\Omega}\vec{r}][\vec{\Omega}d\vec{r}] - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} + m d\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + m d\vec{r}[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}]d\vec{r} - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}$ . Собрав члены, содержащие  $d\vec{v}$  и  $d\vec{r}$ , получим:  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}\vec{r}]$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ . Подставим это в уравнение Лагранжа:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]]$ .

Сила  $m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}]$  связана с неравномерностью вращения,  $2m[\vec{v}\vec{\Omega}]$  - сила Кориолиса,  $m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]]$  - центробежная сила, лежит в плоскости в плоскости  $\vec{r}$ ,  $\vec{\Omega}$  и  $\perp \vec{\Omega}$ , по величине равная  $m\rho\Omega^2$ , где  $\rho$  - расстояние от частицы до оси

вращения.

Отдельно можно рассмотреть случай равномерного вращения системы координат, не имеющей поступательного движения, то есть  $\vec{\Omega} = \text{const}$  и  $\vec{W} = 0$ , следовательно  $L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - U$ , а также уравнение движения:  $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]]$ .

Для энергии частицы в этом случае получим (подставив  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}\vec{r}]$  в  $E = \vec{p}\vec{v} - L$ ):  $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2} [\vec{\Omega}\vec{r}]^2 + U$ ,  $-\frac{m}{2} [\vec{\Omega}\vec{r}]^2$  - центробежная энергия. Скорость частицы в  $K_0$  :  $\vec{v}_0 = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$ , следовательно, в  $K$  и  $K_0$  совпадают импульсы частицы и моменты импульсов. Подставим  $\vec{v}$  :  $E = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - m\vec{v}_0[\vec{\Omega}\vec{r}] + U = E_0 - \vec{M}\vec{\Omega}$  - закон преобразования энергии при переходе к вращающейся системе координат.

## Механика-8. Вариационный принцип Гамильтона.

Наиболее общая формулировка закона движения в механических системах дается принципом наименьшего действия (принципом Гамильтона): Каждая механическая система характеризуется определенной функцией  $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$  или  $L(q, \dot{q}, t)$ , причем движение системы удовлетворяет следующему условию. Пусть в момент времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$  система занимает определенные положения, характеризуемые наборами координат  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ . Тогда между этими положениями система движется таким образом, что бы интеграл  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$  имел наименьшее возможное значение.

Функция  $L$  называется функцией Лагранжа данной системы, а интеграл - действием. Для упрощения дальнейших выводов предположим сначала, что система обладает одной степенью свободы. Пусть  $q = q(t)$  - та функция, для которой  $S$  имеет минимальное значение. Это значит, что возрастает при замене  $q(t)$  на  $q(t) + \delta q(t)$ , где  $\delta q(t)$  - функция малая во всем интервале от  $t_1$  до  $t_2$  (вариация функции  $q(t)$ ). Поскольку при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  все сравниваемые функции должны принимать одни и те же значения  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ , то должно быть  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . При

этом  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ . Необходимым условием минимальности  $S$  является обращение в ноль первой вариации:  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$ , или производя варьирование  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$ .

Запишем, что  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  и проинтегрируем второй член по частям:  $\delta S = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$ .

В силу  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  первый член исчезает, а из второй части получаем:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ,  $i = 1..s$  - уравнение Лагранжа. Если функция Лагранжа известна для данной механической системы, то уравнение Лагранжа устанавливает связь между ускорениями и координатами, то есть это уравнения движения.

Свойства функции Лагранжа:

1. Аддитивность: Если А и В две части механической системы, которая будучи замкнутыми, имели бы функции Лагранжа  $L_A$  и  $L_B$ , то  $\lim L = L_A + L_B$ .



2. Умножение функции Лагранжа на произвольную постоянную не изменит уравнений Лагранжа. Свойство аддитивности допускает лишь одновременное умножение функции Лагранжа всех систем на одинаковую постоянную.

3.  $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t),$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

то есть  $S'$  и  $S$  отличаются дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия, то есть  $\delta S' = 0$  и  $\delta S = 0$ , и вид уравнений остается неизменным.

## Механика-9. Колебания систем с одной и многими степенями свободы. Свободные и вынужденные колебания.

**Свободные одномерные колебания.** Рассмотрим колебания около положения равновесия  $q_0$ , где потенциальная энергия  $U(q)$  минимальна. Разложим в ряд  $U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2}(q - q_0)^2$ , где  $k = U''(q)|_{q=q_0}$  и обозначим  $x = q - q_0$ . Функция Лагранжа примет вид:  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$ ; уравнение движения:  $m\ddot{x} + kx = 0$  или  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Решение имеет вид:  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$  - гармоническое колебательное движение, где  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - циклическая частота,  $\varphi$  - начальная фаза,  $\omega t + \varphi$  - фаза. Энергия системы:  $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + k\omega^2 x^2)$  или  $E = 1/2 m \omega^2 a^2$ . Можно  $x$  представить в виде  $\text{Re } Ae^{i\omega t}$ , где  $A$  - комплексная амплитуда.

**Вынужденные одномерные колебания.** Пусть на систему действует внешнее поле.  $U_e(x, t)$  - дополнительная потенциальная энергия. Разложим в ряд:  $U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \frac{\partial U_e}{\partial x}|_{x=0}$ ;  $U_e(0, t)$  - функция от времени, можно представить как полную производную от некоторой другой функции, следовательно, в функции Лагранжа можно не учитывать. Обозначим  $F(t) = -\partial U_e / \partial x$  - внешняя сила. Тогда:  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)$ , а уравнение движения имеет вид:  $m\ddot{x} + kx = F(t)$  или  $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t)$ . Рассмотрим частный случай, когда  $F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$ . Решение ищем в виде:  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$ . Можно получить  $b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$ ;  $x = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta)$ . Резонанс - когда  $\omega = \gamma$ . Перепишем  $x$  в виде  $x = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]$ ; при  $\gamma \rightarrow \omega$ , по правилу Лопиталя:  $x = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta)$ , то есть при резонансе амплитуда растет линейно со временем, пока колебания не перестанут быть малыми и вся теория перестанет работать. Рассмотрим случай когда  $\gamma = \omega + \varepsilon$ . Представим  $x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega + \varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t}$ ;  $A + Be^{i\varepsilon t}$  - меняется мало в течении периода  $2\pi/\omega$  и движение вблизи резонанса можно считать малыми колебаниями с переменной амплитудой  $C = |A + Be^{i\varepsilon t}|$ . Представим  $A = ae^{i\varphi}$ ,  $B = be^{i\beta}$ ,  $C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \varphi)$ , таким образом  $|a - b| \leq c \leq a + b$  - явление биений.

**Колебания со многими степенями свободы.** Пусть есть  $s$  степеней свободы и потенциальная энергия системы  $U$  как функция обобщенных переменных координат  $q_i$  имеет минимум при  $q_i = q_i^{(0)}$ . Обозначим

$x_i = q_i - q_i^{(0)}$  и разложим в ряд  $U$  с точностью до членов второго порядка, получим:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j$ ,  $k_{ij} = k_{ji}$ . Кинетическая энергия в общем случае имеет вид:  $\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$ ; обозначим  $a_{ik}(q_0) = m_{ik}$ ,  $m_{ik} = m_{ki}$ . Тогда  $E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$  - положительно определенная квадратичная форма.

Функция Лагранжа имеет вид:  $L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k)$ . Уравнения Лагранжа будут иметь вид:  $\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0$  - система из  $s$  линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение  $x_k(t)$  ищем в виде  $x_k = A_k e^{i\omega t}$ , где  $A_k$  - некоторые константы. Подставим это в уравнение Лагранжа и получим систему однородных алгебраических линейных уравнений для  $A_k$ :  $\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0$ , что бы имелись решения, нужно, чтобы определитель системы  $|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0$  - это называется характеристическое уравнение, уравнение степени  $s$  относительно  $\omega^2$ . Оно имеет  $s$  разных вещественных положительных корней  $\omega_\alpha^2$  (корни могут и совпадать), называемых собственными частотами системы. Найдя  $\omega_\alpha$  можно получить  $A_k$ , которые будут пропорциональны минорам  $\Delta_{k\alpha}$  для определителя  $|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0$ . Частное решение имеет вид:  $x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$ , где  $C_\alpha$  - любая постоянная (комплексная). Общее решение:  $x_k = \text{Re}\{\sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\} \equiv \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha$ , где обозначено  $\Theta_\alpha = \text{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$ . Можно выразить  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$ , через  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , то есть  $\Theta_\alpha$  можно рассматривать как новые обобщенные координаты.  $\Theta_\alpha$  называются нормальными координатами (или главными). Они удовлетворяют уравнению:  $\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0$  и задают нормальные колебания которые являются независимыми. Тогда  $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2)$ , где  $m_\alpha$  - положительные постоянные. Для удобства можно ввести нормальные колебания как  $Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha$ , тогда  $L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)$ .

Рассмотрим нахождение нормальных координат для трехмерных колебаний материальной точки во внешнем поле.  $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  - кинетическая энергия. Начало координат поместим в точку минимума  $U(x, y, z) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2)$  и  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ ,  $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$  - главные частоты. Задачу можно свести к задаче о вынужденных колебаниях.  $L = L_0 + \sum_k F_k(t) x_k$ , где  $L_0$  - функция Лагранжа свободных колебаний. Вводя нормальные координаты получим:  $L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha$ , где обозначено  $f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} Q_\alpha$ . Тогда уравнение движения  $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t)$  будут содержать лишь по одной неизвестной функции.

# Механика-10. Канонические уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона.

Ряд преимуществ представляет описание с помощью обобщенных координат и импульсов системы. Полный дифференциал функции Лагранжа как функция координат и скоростей равен  $dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$ . Это выражение можно написать в виде  $dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i$ .

Поскольку производные  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  являются обобщенными импульсами,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$  в силу уравнения Лагранжа. Перепишем второй член в виде  $\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i$ , перенеся полный дифференциал  $d(\sum_i p_i \dot{q}_i)$  в левую сторону равенства и изменив все знаки, получим:  $d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$  величина, стоящая под знаком дифференциала, представляет собой энергию системы выраженную через координаты и импульсы, она называется функцией Гамильтона системы  $H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ .

Из дифференциального равенства  $dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$  следуют уравнения:  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  это искомые уравнения движения в переменных  $q_i$  и  $p_i$ , так называемые уравнения Гамильтона.

**Скобки Пуассона.** Пусть  $f(q, p, t)$  - некоторая функция координат, импульсов и времени. Составим ее полную производную по времени:  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum (\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k)$ . Подставив сюда вместо  $\dot{q}_k$  и  $\dot{p}_k$  их выражения из уравнений Гамильтона, получим  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}$ , где введено обозначение  $\{Hf\} = \sum (\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k})$ . Это выражение называется скобками Пуассона для величин  $H$  и  $f$ . Такие функции от динамических переменных, которые остаются постоянными при движении системы называются интегралами движения. Условие того, что бы величина  $f$  была интегралом движения ( $\frac{df}{dt} = 0$ )  $\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0$ . Если же интеграл движения не зависит от времени явно, то  $\{Hf\}$ , то есть его скобки Пуассона с функцией Гамильтона должны обращаться в ноль. Для любой пары величин  $f$  и  $g$  скобки Пуассона определяются аналогично:  $\{fg\} = \sum (\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k})$

Свойства:

1.  $\{fg\} = -\{gf\}$
2.  $\{fc\} = 0$
3.  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
4.  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$

$$5. \frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}.$$

6. Если одна из функций  $f$  или  $g$  совпадает с одним из импульсов или координат, то скобки Пуассона сводятся просто к частной производной:  $\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$ ,  $\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$

$$7. \{q_i q_k\} = 0, \{p_i p_k\} = 0, \{p_i q_k\} = \delta_{ik}$$

8.  $\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0$  - это называется тождеством Якоби

Важное свойство скобок Якоби состоит в том что если  $f$  и  $g$  интегралы движения, то составленные из них скобки Пуассона тоже являются интегралом движения:  $\{fg\} = const$  - так называемая теорема Пуассона.

## Механика-11. Уравнения Гамильтона - Якоби.

$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$  - функция Гамильтона.  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  - уравнения Гамильтона. Действие можно представить в виде  $S = \int (\sum_i p_i dq_i - H dt)$  (в механике Лагранжа  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ ). Можно показать что  $\frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0$ , а  $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ . Тогда  $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0$  - уравнение Гамильтона - Якоби. Оно является уравнением в частных производных первого порядка.

**Полный интеграл** — это решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащие столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных. В уравнении Гамильтона - Якоби независимыми являются  $t$  и  $q_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), таким образом полный интеграл должен содержать  $s + 1$  произвольных постоянных. Так как функция входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом, то есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби имеет вид:  $S = f(t; q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A$ , где  $\alpha_{1\dots s}$  и  $A$  - произвольные постоянные. Выясним теперь связь между полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби и решением уравнений движения. Проведем каноническое преобразование от  $p, q$  к новым переменным. Функцию  $f(t, q, \alpha)$  выберем в качестве производящей, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  - в качестве новых импульсов. Новые координаты -  $\beta_1, \dots, \beta_s$ . Используя формулы канонического преобразования:  $p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}$ ,  $\beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ ,  $H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$ . Но так как функция  $f$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, то мы видим, что новая функция Гамильтона равна 0:  $H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , следовательно, канонические уравнения для новых переменных имеют вид:  $\dot{\alpha}_i = 0$ ,  $\dot{\beta}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = const$ ,  $\beta_i = const$ . С другой стороны,  $s$  уравнений  $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$  дают возможность выразить  $s$  координат  $q$  через  $t$  и  $2s$  постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Так можно найти общий интеграл уравнений движения. Итого, метод Гамильтона - Якоби сводится к следующим операциям:

- По функции  $H$  составляется уравнение Гамильтона-Якоби и находится полный интеграл  $S = f(t; q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A$
- Дифференцируя его по произвольным постоянным  $\alpha$  и приравнивая к новым постоянным  $\beta$ , получаем систему  $s$  алгебраических уравнений вида:  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ , решая которую найдем координаты  $q$  как функции

времени и  $2s$  произвольных постоянных.

- Зависимость  $p_i(t)$  можно найти потом из уравнений  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Если  $H$  не зависит от времени явно, то есть система является консервативной, то уравнение Гамильтона-Якоби имеет более простой вид. При этом  $S = S_0(q_0) - Et$ , где  $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i$  - укороченное действие. Тогда, подставив это в уравнение Гамильтона-Якоби, получаем новое уравнение Гамильтона-Якоби для  $S_0(q_0)$  в виде:  $H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, t) = E$ , где  $E$  энергия системы.

## Механика-12. Деформации и напряжения в твердых телах. Модули Юнга, сдвига. Коэффициент Пуассона.

**Идеально упругое тело** - это твердое тело, напряжения которого в каждой точке в любой момент времени зависят только от деформаций в той же точке в тот же момент времени (кроме того, напряжения могут зависеть от температуры  $T$ ).

**Деформация** - изменение формы и объема тела (объекта).

**Сдвиг** - деформация, связанная с изменением углов между сторонами тела.

**Скорость деформации** -  $v = \frac{du}{dt}$ , где  $u$  - смещение частицы.

**Тензор деформации**  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ , где  $u$  - вектор смещений  $u = r(r_0, t) - r_0$ ,  $r$  - радиус-вектор частицы в момент времени  $t$ ,  $r_0$  - радиус-вектор той же частицы в первоначальный момент времени,  $x$  - координата.

Коэффициенты тензора деформации с одинаковыми индексами характеризуют деформации растяжения (сжатия) в направлении соответствующей оси. Значит, зная тензор деформаций можно найти изменение длины малого материального отрезка.

Коэффициенты тензора деформации с различными индексами характеризуют деформации сдвига. В случаях малой деформации, справедлив закон Гука, т.е. между напряжением и деформациями линейная зависимость, где коэффициенты пропорциональности - Модули Упругости.

**Тензор напряжений**  $P_{ik}$  (симметричный тензор) - компоненты вектора являются функциями  $r$  и  $t$ , определяют поле напряжений в среде.  $dF_i^\sigma = P_{ik} d\sigma$ ,  $dF^\sigma$  - поверхностная сила (определяет силу взаимодействия частиц среды между друг другом), приложенная к элементарной площадке  $d\sigma$  поверхности частицы.

**Закон Гука** (обобщенный) -  $P_{ik} = C_{iklm} \varepsilon_{lm} - \alpha_{ik} (T - T_0)$ .  $C_{iklm}$  - модуль упругости, тензор упругости 4го ранга, имеет 81 независимую компоненту, однако из-за различных симметрий требуется лишь 21 независимый модуль упругости, чтобы охарактеризовать упругие свойства твердых тел.  $\alpha_{ik}$  - коэффициент термоупругости.

**Модуль Юнга**  $E$  характеризует способность твердого тела сопротивляться растяжению (стержень - 1D).

**Модуль сдвига**  $G$  - способность материала сопротивляться изменениям формы, при сохранении объема (пластина - от 2D).

**Модуль объемного сжатия**  $K$  - изменениям объема, при сохране-



нии формы. (кубик воды - 3D) Коэффициент Пуассона  $\nu$  - т.к. растяжение вдоль направления внешней силы происходит одновременно с его поперечным сжатием, при этом отношение поперечного сжатия к продольному растяжению равно коэф. Пуассона. Для металлов  $\nu = 0.3 \dots 0.5$

При изотермической деформации и для изотропного тела з-н Гука

$$P_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) + K\varepsilon_{kk}\delta_{ij}.$$

$E = \frac{9KG}{3K+G}$  - Модуль Юнга  $E$ ,

$\nu = \frac{1}{2} \frac{3K-2G}{3K+2G}$  - Коэффициент Пуассона,

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль сдвига (он же модуль Ламэ),

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  - Модуль объемного сжатия (растяжения),

$\lambda$  - тоже модуль Ламэ

# Механика-13. Механика жидкостей и газов. Течение идеальной жидкости. Уравнение Эйлера.

**Идеальная жидкость** - среда (жидкость или газ) с изотропным тензором напряжений.

**Идеальная жидкость** - сплошная среда, в которой при любой деформации и скорости деформации касательные напряжения пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями, а все нормальные напряжения одинаковы.

**Тензор напряжений**  $P_{ik} = -p * \delta_{ik}$

Система Уравнений движения идеальной жидкости:

- $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$  - уравнение неразрывности
- $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}$  - уравнение Эйлера, уравнение изменения импульса.
- $\frac{ds}{dt} = 0$  - уравнение адиабатичности (сколько тепла притекает, столько оттекает)
- $E = C_v T$  - калорическое,  $p = \rho R T$  - термическое уравнение состояния.

Решения этой системы должно удовлетворять граничным (на стенках  $V_n = 0$ ) и в случае нестационарных движений течений - начальным условиям в некоторый момент  $t_0$ .

Как получаются интегралы движения идеальной жидкости? Добавлением доп. условий:

1. В случае, изэнтропичных стационарных течений идеальной жидкости, если объемные силы потенциальны и стационарны, а также прращение энтальпии  $dh = dp/\rho$ . Интеграл Бернулли:  $\frac{v^2}{2} + h + u^e = C$ , где  $h = E + p/\rho$  - энтальпия,  $v$  - скорость частицы. При стационарном течении среды траектории частиц совпадают с линиями тока.
2. В случае если жидкость идеальна, несжимаема, движется в поле потенциальных сил  $V = \operatorname{grad} \varphi$ , то уравнения сильно упрощаются, уравнение непрерывности есть  $\Delta \varphi = 0$ , уравнение Эйлера в интеграл Коши  $1/2(\operatorname{grad} \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + u^e = C$ , где  $c$  - константа, одинакова для всех частиц жидкости,  $u^e$  - потенциальная энергия внешнего поля (потенциальные силы также действуют на частицу жидкости)

3. Теорема Томпсона о сохранении циркуляции скорости по замкнутому контуру, если силы потенциальны.

# Механика-14. Течение вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса. Число Рейнольдса.

Вязкая жидкость - среда в которой напряжения зависят от скоростей деформаций, при этом наряду с нормальными напряжениями, вообще говоря, отличаются от нуля и касательные напряжения. В число основных уравнений механики сплошных сред входит уравнение изменения импульса:  $\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$ ,  $P_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$ , второй член определяет силу, зависящую от скорости движения частиц относительно друг друга, есть вязкий тензор напряжений. Для линейной вязкой жидкости (изотропной):  $\tau_{ik} = \eta(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}$  где  $\eta$  и  $\zeta$  - первый и второй коэффициенты вязкости, зависят от плотности и температуры среды. Один определяет деформации чистого сдвига, а второй - равномерного сжатия. Если коэффициенты вязкости можно считать постоянными для данной жидкости, уравнение изменения импульса для такой жидкости приводит к **Навье-Стокса уравнению**  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \eta \Delta \vec{v} + (\frac{\eta}{3} + \zeta) \text{grad div } \vec{v} + \rho \vec{f}$ , если жидкость несжимаема  $\text{div } \rho = 0$ , тогда  $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}$ , где  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $\nu = \eta/\rho$ ,  $\eta$  - динамическая  $\frac{dS}{dt} = 0$  приток тепла = 0. Граничное условие к уравнениям движения вязкой жидкости есть условие обращения в нуль скорости среды на неподвижной твердой поверхности  $s_0$  (условие прилипания)  $V|_{s_0} = 0$

Из этих уравнений и граничных условий находят поля давления и скоростей. В общем случае движение сжимаемой и нагреваемой жидкости) в нормальных условиях учитывается ещё переменность  $\rho$  и зависимость  $\eta$  от температуры, что изменяет вид уравнений. При этом дополнительно используются уравнение баланса энергии и Клапейрона уравнение - уравнение состояния.

**Рейнольдса число** Получается приведением уравнения Навье-Стокса к безразмерной форме. Один из подобию критериев для течений вязких жидкостей и газов, характеризующий соотношение между инерционными силами и силами вязкости:  $Re = \rho v l / \eta$ , где  $\rho$  - плотность,  $\eta$  - динамический коэффициент вязкости жидкости или газа,  $\nu$  - характерная скорость потока,  $l$  - характерный линейный размер. Так, при течении в круглых цилиндрических трубах обычно принимают  $l = d$ , где  $d$  - диаметр трубы, а  $v = v_{cp}$ , где  $v_{cp}$  - средняя скорость течения; при обтекании тел  $l$  - длина или поперечный размер тела, а  $v = v_\infty$ , где  $v_{infy}$  - скорость невозмущённого потока, набегающего на тело. Режим течения жидкости меняется при пере-

ходе числа Рейнольдса некоторого критического значения. При  $Re < Re_{kp}$  возможно лишь ламинарное течение жидкости, а при  $Re > Re_{kp}$  течение может стать турбулентным. Например, для течения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубке  $Re_{kp} = 2300$ .

## Механика-15. Волны в сплошной среде. Характеристики акустических волн.

Волны с малыми амплитудами и в сжимаемой жидкости - ЗВУКОВЫЕ. Рассмотрим звуковые волны в идеальной жидкости. Пусть равновесное состояние характеризуется  $p_0$  и  $\rho_0$ . Если в среде возникают малые отклонения, то  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho' + \rho_0$ . Пусть  $c_0^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_S$  - производную брали при постоянной энтропии в равновесном состоянии. Волновое уравнение для отклонения плотности от ее равновесного значения:  $\Delta \rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$ . Для  $p'$  - аналогичное уравнение, при  $v = \text{grad } \varphi$  для  $\varphi$ . Все уравнения изменений содержат одну константу  $c_0$  - скорость звука. В одномерном случае,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$  и решение волнового уравнения  $\varphi = \varphi^+(x - c_0 t) + \varphi^-(x + c_0 t)$  - бегущие плоские волны. Если функция гармоническая, то волна называется монохроматической.

**Фазовая скорость**  $c = \omega/k$ , групповая  $U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ .

**Эффект Доплера**  $\omega = \frac{\omega'}{1 - \frac{V}{c_0} \cos \theta}$ ,  $\omega'$  - частота в системе связанной с наблюдателем.  $V$  - скорость удаления, приближения,  $\theta$  - угол между направлением распространения волны и скоростью удаления (приближения).  $\cos \theta < 0$  - удаляющий источник,  $\omega < \omega'$  длина волны ниже.  $\cos \theta > 0$  - приближающийся,  $\omega > \omega'$ .

**Число Маха**  $M = V/c$ .  $V$  - скорость потока газа, относительно неподвижной системы отсчета. А  $c$  - скорость звука в газе.  $M > 1$  - сверхзвуковой,  $M < 1$  - дозвуковой поток. Свойства сверхзвукового потока отличны от дозвукового, напр., в таком потоке малые возмущения плотности газа не могут распространяться с любым направлением, лишь в конусе с углом раствора  $\alpha$ , таким что  $\sin \alpha = 1/M$ .

# Термодинамика-1. Термодинамический подход к описанию

## молекулярных явлений. Температура.

*Предмет молекулярной физики.* Термодинамика и молекулярная физика изучают макроскопические процессы в телах, связанные с колоссальным количеством молекул и атомов. Молекулярная физика исходит из представления об атомно-молекулярном строении вещества и рассматривает теплоту как беспорядочное движение атомов и молекул. Рассматривает свойства и строение отдельных атомов и молекул.

*Основные предположения МКТ.* Газ разряжен, молекулы - упругие шарики (материальные точки), обладающие только кинетической энергией.

*Статистический Подход описанию молекулярных явлений.* Для изучения системы многих частиц информация должна иметь обобщённый характер и относится не к отдельным частицам, а к совокупности большого числа частиц - статистический метод. Законы поведения совокупностей большого числа частиц, исследуемые статистическими методами, называются статистическими закономерностями.

*Понятие о статистических закономерностях.* Закономерности, обусловленные массовостью участвующих в их возникновении ингредиентов, называются статистическими, (бросание монеты).

*Термодинамический подход* включает в себя следующие положения: термодинамика не вводит никаких специальных гипотез и конкретных представлений о строении вещества и физической природе теплоты. Ее выводы основаны на общих принципах, являющихся обобщением опытных фактов. Она рассматривает теплоту как внутреннее движение, но не пытается конкретизировать, что это за движение. Термодинамическое равновесие трудно поддается логическому определению. К нему приходят при рассмотрении конкретных реальных явлений последующего обобщения. Например: 2 тела при тепловом контакте в изолированной системе при разных температурах.

*Квазистатические процессы* - идеализированные процессы, состоящие из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия. Если в результате какого-либо процесса система переходит из состояния в другое состояние и если возможно ее вернуть хотя бы одним способом в исходное состояние, притом так, чтобы во всех остальных телах не произошло никаких изменений, то процесс - обратимый, иначе - необратимый. Если способ

возврата безразличен, то процесс обратимый в широком смысле слова, а если через ту же последовательность, то - в узком смысле слова. Квазистатические процессы обратимы в узком смысле слова.

*Температура* - количественная мера «нагретости» тела. Температура является мерой средней кинетической энергии частиц тела. Физическая величина, служащая индикатором температуры, называется термометрической величиной:  $T = f(a)$ , где  $a$  - термометрическая величина. Введение температурной шкалы сводится к выбору (монотонной) функции  $f(a)$ . Простейший способ  $T = A * a$ . Величину  $A$  определяют по двум реперным точкам:

- температура плавления льда  $T_{nl}$ , температура кипения воды  $T_{\kappa}$ ,  $T_{\kappa} - T_{nl} = 100^{\circ} \Rightarrow A = (T_{\kappa} - T_{nl}) / (a_{\kappa} - a_{nl}) = 100 / (a_{\kappa} - a_{nl})$
- тройная точка воды  $T = 273.16 K$ :  $A = T_{mp} / a_{mp}$ . Выбор температуры  $273.16 K$  сделан для того, чтобы температура  $T_{\kappa} - T_{nl}$  максимально соответствовала  $100 K$ , если пользоваться газовым термометром с идеальным газом.

Основным термометром, по которому градуируют остальные, выбирают идеальный газ, в котором  $pV = CT$ .

*Формулы пересчёта*

- Шкала Цельсия:  $T_{\kappa} = 100^{\circ}$ ,  $T_{nl} = 0^{\circ}$ ,  $T_x = (a_x - a_{nl}) / (a_{\kappa} - a_{nl}) * 100^{\circ}$ .
- Шкала Реомюра:  $T_{\kappa} = 80^{\circ}$ ,  $T_{nl} = 0^{\circ}$ ,  $T_x = (a_x - a_{nl}) / (a_{\kappa} - a_{nl}) * 80^{\circ}$ .
- Шкала Фаренгейта:  $T_{\kappa} = 212^{\circ}$ ,  $T_{nl} = 32^{\circ}$ ,  $T_x = 32 + (a_x - a_{nl}) / (a_{\kappa} - a_{nl}) * 180^{\circ}$ .
- $T_R = 0.8 T_C$ ,  $T_F = 32 + 1.8 T_C$ .



## Термодинамика-2. Первое начало термодинамики. Циклические процессы.

*Работа.* Сила  $F = pS \Rightarrow$  работа  $\delta A = pSdx = pdV$ . Работа внешних сил  $<0$ , работа газа при увеличении объёма  $>0$ :  $\delta A = pdV$ . В общем смысле  $\delta A = f_1d\zeta_1 + f_2d\zeta_2 + \dots$ ,  $f$  - обобщённая сила,  $\zeta$  - параметры.

*Теплота* - энергия в форме молекулярного движения.  $\delta Q$  положительна, если она сообщается системе, и отрицательна, если забирается от неё.

*Внутр. энергия.* Энергия, которая связана со всевозможными движениями частиц системы и их взаимодействием между собой, включая энергию, обусловленную взаимодействием и движением частиц, составляющих сложные частицы, называемую внутр.  $dU > 0$ , если В.Э. увеличивается. Из определения внутренней энергии следует, что она имеет вполне определенное значение в любом состоянии системы. Это означает, что внутренняя энергия  $U$  является функцией состояния, а следовательно полным дифференциалом.

*1 начало термодинамики.* Теплота есть форма энергии:  $\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow \delta Q = dU + pdV$

*Обратимые и необратимые процессы.* Процессом называется переход системы из одного равновесного состояния в другое, т. е. от одних значений параметров  $p_1, V_1, T_1$  к другим  $p_2, V_2, T_2$ .

*Циклические процессы.* Процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние. Цикл на диаграмме процессов изображается замкнутой кривой.

*Преобразование теплоты в работу.* Вся работа, совершённая за цикл получается за счёт кол-ва теплоты, которое поступило в систему.

*КПД  $\eta = A/Q^{(+)}$ ;  $\oint \delta Q = \int_{(+)} \delta Q + \int_{(-)} \delta Q = Q^{(+)} + Q^{(-)} = A$ .  $\eta = 1 + Q^{(-)}/Q^{(+)}$*

*1я теорема Карно* «КПД необратимой машины, работающей по циклу Карно, не может быть больше КПД обратимой машины с теми же теплообменником (нагревателем) и теплоотдатчиком (холодильником)».

Обратимый цикл, отличный от цикла Карно, удовлетворяющий условию теоремы, изобразится на диаграмме  $T - S$  замкнутой кривой внутри

прямоугольника.

$$\delta Q = TdS = dU + dA$$

$$\oint \delta Q = \oint TdS = \oint dU + \oint dA = A$$

$$A_K = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1)$$

$$Q_K^+ = \int_{A_1}^{A_2} TdS = T_1 \int_{A_1}^{A_2} dS = T_1(S_2 - S_1)$$

$$\eta_K = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$A = \oint TdS = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4$$

$$Q^+ = \int TdS = T_1(S_2 - S_1) - \sigma_1 - \sigma_4 = Q_K^+ - \sigma_1 - \sigma_4$$

$$\eta = \frac{A_K - \Delta_{1234}}{Q_K^+ - \Delta_{14}} = \frac{\eta_K - \Delta_{14} - \Delta_{23}}{Q_K^+ - \Delta_{14}} \Rightarrow \eta \leq \eta_K$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{Q^{(-)}}{Q^{(+)}} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{Q^{(+)}}{T_1} + \frac{Q^{(-)}}{T_2} \leq 0$$

## Термодинамика-3. Второе начало термодинамики.

2-е начало ТД позволяет судить о направлении процесса.

*2е начало ТД:* Невозможен процесс с  $\eta = 1$ .

Томсон: «Невозможен такой *круговой процесс*, единственным результатом которого было бы производство работы за счёт уменьшения внутренней энергии теплового резервуара».

Планк: «Невозможно построить *периодически действующую машину*, единственным результатом которой было бы поднятие груза за счёт охлаждения теплового резервуара».

Клаузиус: «Теплота не может *самопроизвольно* переходить от менее нагретого тела к более нагретому», т.е. невозможно каким бы то ни было способом забрать теплоту от тела менее нагретого, целиком передать его телу более нагретому и притом так, чтобы в природе больше не произошло никаких изменений - процесс Клаузиуса.

Докажем их эквивалентность: Из невозможности процесса Томсона следует невозможность процесса Клаузиуса. Для док-ва предположим обратное, т.е. что процесс Клаузиуса возможен. Взяв простейшую тепловую машину, произведём круговой процесс, в результате которого машина отнимет от нагревателя теплоту  $Q_1$ , передаст холодильнику теплоту  $Q_2$  и совершит положительную работу  $A = Q_1 - Q_2$ . Затем с помощью процесса Клаузиуса теплоту  $Q_2$  вернём от холодильника нагревателю. Тогда получится круговой процесс, единственным результатом которого является производство работы  $A$  за счёт эквивалентного её кол-ва теплоты  $Q_1 - Q_2$ , отнятого от нагревателя; никаких других изменений в природе не произойдёт. Но это есть процесс Томсона, а он по предположению невозможен. Утверждение доказано.

Обратно, из невозможности процесса Клаузиуса вытекает невозможность процесса Томсона. Предположим обратное, т.е. что процесс Томсона возможен. Тогда пользуясь процессом, отнимем от менее нагретого тела теплоту  $Q$  и за счёт этой теплоты произведём механическую работу, например, подняв груз. Затем используем энергию поднятого груза для нагревания, например, путём трения, более нагретого тела. В результате  $Q$  перейдёт от менее нагретого тела к более нагретому, и никаких изменений не произойдёт. Но это есть процесс Клаузиуса, а он невозможен.

*2-я теорема Карно:* КПД обратимого цикла Карно больше КПД любого другого обратимого цикла, в котором максимальные и минимальные температуры равны соответственно температуре нагревателя и температу-

ре холодильника цикла Карно.

Рассмотрим цикл Карно в  $\{T, S\}$  — прямоугольник. Другой цикл - лежит в этом прямоугольнике, касаясь  $T = T_1, T = T_2$ . 1 начало  $\delta Q = TdS = dU + dA$ , интегрируем по циклу  $\oint \delta Q = \oint TdS = \oint dU + \oint dA = A$ , т.к.  $\oint dU = 0$ . Для цикла Карно  $A_K = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$ ,  $Q_K^{(+)} = T_1(S_2 - S_1)$ , поэтому  $\eta_K = 1 - T_2/T_1$ . Для другого цикла  $A = A_K - \Delta_{1234}$ ,  $Q^{(+)} = Q_K^{(+)} - \Delta_{14}$ , поэтому  $\eta = (A_K - \Delta_{1234})/(Q_K^{(+)} - \Delta_{14})$ . Но  $A_K = \eta_K Q_K^{(+)}$ , отсюда  $\eta = \eta_K - \Delta_{14}(1 - \eta_K)/(Q_K^{(+)} - \Delta_{14}) - \Delta_{23}/(Q_K^{(+)} - \Delta_{14}) \leq \eta_K$ .

*Неравенство Клаузиуса  $Q^{(+)} / T_1 + Q^{(-)} / T_2 \leq 0$*

## Термодинамика-4. Энтропия термодинамической системы.

### Термодинамические потенциалы.

Для необратимых круговых процессов выполняется неравенство Клазиуса, а для обратимых круговых процессов выполняется равенство Клазиуса. «Приведённое кол-во теплоты, полученное системой при любом квазистатическом круговом процессе, равно нулю».

*Энтропия* Энтропия системы есть функция её состояния, определённая с точностью до произвольной постоянной. Разность энтропии в двух равновесных состояниях 2 и 1, по определению, равна приведённому кол-ву теплоты, которое надо сообщить системе, чтобы перевести её из состояния 1 в состояние 2 по любому квазистатическому пути. Энтропия адиабатически изолированной системы не может убывать; она либо возрастает, либо остаётся постоянной - Закон возрастания энтропии.

Пусть замкнутая система, т. е. система, изолированная от других, переходит в некотором процессе из состояния 1 в 2. Возвратим систему с помощью обратимого процесса в состояние 1. При этом, конечно, необходимо ликвидировать изолированность системы. В результате возвращения системы в состояние 1 образовался цикл, к которому можно применить неравенство Клаузиуса:  $\oint \delta Q/T = \int_{(1)}^{(2)} \delta Q/T + \int_{(2)}^{(1)} \delta Q/T$ . При переходе  $1 \rightarrow 2$  по пути  $L_1$  система была изолированной и, следовательно,  $\delta Q$  в интеграле по  $L_1$  равно нулю и равен нулю интеграл. С другой стороны, в обратимом переходе по пути из состояния 2 в 1 в подынтегральном выражении можно считать, что  $\delta Q/T = dS$ . Поэтому получаем  $\int_{(2)}^{(1)} \delta Q/T = \int_{(2)}^{(1)} dS = S_2 - S_1 \leq 0$ , или иначе  $S_2 \leq S_1$ .

Энтропия - аддитивная функция состояния. При расширении в вакуум энтропия увеличивается. Энтропия максимальна в состоянии равновесия. Энтропия  $S$  определяется логарифмом числа микросостояний, посредством которых реализуются рассматриваемое макросостояние  $S = k \ln \Gamma$  — ф-ла Больцмана.

ТД потенциалы:

- $TdS = dU + pdV$  — ТД тождество.
- Энтальпия  $H = U + pV$
- Энтропия  $S = k \ln \Gamma$

- Свободная энергия  $F = U - TS$
- ТД функция Гиббса  $G = F + pV = H - TS$
- $dU = TdS - pdV$ ,  $dH = dU + pdV + Vdp$
- $dF = -SdT - pdV$ ,  $dG = -SdT + Vdp$ .

## Термодинамика-5. Взаимодействие молекул. Идеальный газ. Основные газовые законы.

Столкновения делятся на упругие и неупругие.  $U$  - потенциальная энергия взаимодействия частиц.  $E = E_{кин} + U$

**Идеальный газ** - это такая модель газа, для которой выполняется:

1.  $U = 0$ ;
2. столкновения между молекулами газа - упругие
3. молекулы газа - это материальные точки.

$\varepsilon = m\bar{V}^2/2 = 3/2\theta \Rightarrow \partial\varepsilon/\partial V = 0$ ;  $\partial\varepsilon/\partial\theta = C_v = \frac{3}{2}$  - внутренняя энергия.

Уравнения состояния: (Клапейрона-Менделеева)

$$pV = nkT, n = \nu N_a, pV = \nu RT, R = N_a k, pV/N_a = kT = \theta, pv = \theta.$$

Газовые законы:

- $\theta = const \Rightarrow pV = const$  - закон Бойля-Мариотта
- $p = const \Rightarrow \frac{\theta}{V} = const$  - закон Гей-Люссака
- $V = const \Rightarrow \frac{\theta}{p} = const$  - закон Шарля.

## Термодинамика-6. Распределение молекул газа по скоростям. Идеальный газ во внешнем поле

*Распределение Максвелла*

$$dP(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \bar{v}^2 = \sqrt{3kT/m}$$

*Распределение Больцмана* Газ во внешнем потенциальном поле  $U$ :  $E = mv^2/2 + U$

$$dP(x, y, z; p_x, p_y, p_z) = C e^{-\frac{mv^2}{2kT} + \frac{U}{kT}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = C e^{-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{U}{kT}} d^3x d^3p$$

На языке числа частиц (р-е Больцмана)

$$\frac{dn}{n dx dy dz} = C e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}$$



## Термодинамика-7. Канонические распределения.

Система описывается параметрами  $\varepsilon$ ,  $N$ ,  $x$  ( $x$  - остальные параметры)

**1.** (Система в адиабатических стенках) Система с дискретным спектром энергии  $\{E_n\}$ . Статистический вес (число микросостояний, реализующих данное макросостояние):

$$\Gamma(\varepsilon; x, N) = \sum_n \Delta(\varepsilon - E_n),$$

где суммирование ведётся по всем микросостояниям,  $\Delta(\xi) = [0, |\xi| > \delta\varepsilon; 1, |\xi| < \delta\varepsilon]$  - квазикroneкерова дельта-функция.

Микроканоническое р-е Гиббса

$$\omega_n(\varepsilon; x, N) = \frac{\Delta(\varepsilon - E_n(x, N))}{\Gamma(\varepsilon; x, N)}$$

Формула Гиббса:  $S = \ln \Gamma$ .

**2.** (Каноническое) распределение Гиббса (система в термостате):

$$\omega_n(\theta; x, N) = \frac{1}{z} e^{-E_n/\theta} = \exp \left\{ \frac{E_n(\theta, x, N) - F_n(x, N)}{\theta} \right\};$$
$$z = \sum_n e^{-E_n/\theta} - \text{статистическая сумма.}$$

Свободная энергия  $F = -\theta \ln z$ . (примечание: возможно, в exp надо поменять местами слагаемые)

**3.** Большое каноническое распределение ( $N \neq \text{const}$  - система выделенная из термостата воображаемыми стенками)

$$\omega_{N,n}(\theta; x, \mu) = (1/\zeta) e^{-(E_n - \mu N)/\theta}; \quad \zeta = \sum_n e^{-(E_n - \mu N)/\theta} - \text{большая стат. сумма}$$

Термодинамический потенциал Гиббса  $\Omega(\theta, x, \mu) = -\theta \ln \zeta(\theta, x, \mu)$ .

# Термодинамика-8. Идеальный Бозе- и Ферми-газы. Равновесное излучение

Ферми-газ.  $N_p \equiv N(E_p) = 0, 1$ . Плотность вероятности

$$n_p = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \zeta_p,$$

где

$$\zeta_p = \sum_{N_p=0}^1 \exp \left\{ -\frac{E_p - \mu}{\theta} N_p \right\} = 1 + \exp \left\{ -\frac{E_p - \mu}{\theta} \right\},$$

откуда

$$n_p = \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/\theta} + 1}.$$

Бозе-газ.  $N_p$  не ограничено.

$$\zeta_p = \sum_{N_p=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{E_p - \mu}{\theta} N_p \right\} = \sum_{N_p=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{E_p - \mu}{\theta}} \right)^{N_p} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{E_p - \mu}{\theta} + \beta}}, \beta = \mu/\theta$$

отсюда

$$n_p = \partial \beta \ln \zeta_p = \frac{1}{e^{-\frac{E_p - \mu}{\theta}} - 1}$$

Равновесное излучение

$$\langle n(\varepsilon_i) \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \varepsilon_i) - 1}$$
$$\beta = (kT)^{-1}$$

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} d\omega$$

Спектральная плотность энергии излучения (формула Планка)

$$w_\omega = \frac{\hbar \omega}{V} \frac{dn_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar \omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\hbar \omega / kT] - 1}$$

Закон Стефана-Больцмана

$$w = aT^4, \quad a = \frac{k^4 \pi^2}{15c^3 \hbar} = 7.56 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$$

Формула Стефана-Больцмана

$$M = cw/4 = \sigma T^4, \quad \sigma = ca/4 = 5.67032 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$$

$M$  - энергетическая светимость (поток, отнесённый к площади поверхности)

Закон смещения Вина

$$\lambda_{\text{макс}} T = 0.0029 \text{ м} \cdot \text{К}$$

## Термодинамика-9. Теплоемкость твердых тел. Модели Дебая и Эйнштейна.

*Теплоемкость твердого тела.*

Теплоемкость при постоянном объеме определяется соотношением

$$C_V \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

где  $S$  - энтропия,  $E$  - внутренняя энергия,  $T$  - абсолютная температура.

1. При комнатных температурах значение теплоемкости почти всех твердых тел близки к  $3Nk_B$ .

2. При низких температурах теплоемкость заметно уменьшается и в области абсолютного нуля температур приближается к нулю по закону  $N^3$  для диэлектриков и по закону  $N$  для металлов, если металл переходит в сверхпроводящее состояние, то закон уменьшения теплоемкости более резкий, чем  $N$ .

*Модель Эйнштейна.*

Внутренняя энергия есть энергия системы «осцилляторов». Теплоемкость  $C_V$  этой системы осцилляторов

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k \left( \frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \exp[\varepsilon/kT] / \{ \exp[\varepsilon/kT] - 1 \}^2$$

Таков, по эйнштейновской модели, вклад, который дают  $N$ , осцилляторов одинаковой частоты в теплоемкость твердого тела. Если вместо  $N$  взять  $3N$ , поскольку каждый из  $N$  атомов имеет три степени свободы, и предельный случай выше приведенной формулы, отвечающий высоким температурам, то мы получим для  $C_V = 3R$ .  $\varepsilon$  - элементарная порция энергии,  $\varepsilon = k\theta_\varepsilon$  ( $\theta_\varepsilon$  - температура Эйнштейна)

*Модель Дебая.*

$$U = 9N_A k T \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} d\xi \frac{\xi^3}{e^\xi - 1},$$

где  $\theta_D = \frac{\hbar\omega}{k} \left( \frac{6\pi^2 N_A}{V} \right)^{\frac{1}{3}}$  - температура Дебая,  $N$  - число атомов образца,  $x_D = \theta/T$ .

Тогда теплоемкость  $C_v$  этой системы

$$C_V = 9N_A k \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} d\xi \frac{\xi^4 e^\xi}{(e^\xi - 1)^2}$$

При очень низких температурах ( $T \ll \theta_D$ ), верхний предел можно положить равным  $\infty$ . При очень высоких температурах ( $T \gg \theta_D$ ) верхний предел очень близок к нулю, и, следовательно  $\exp \xi \approx 1 + \xi$ :

$$U = 3N_A k T = 3RT, \Rightarrow C_V = 3R,$$

# Термодинамика-10. Теория флуктуаций. Броуновское движение

Пусть  $F$  - некоторая динамическая величина, микроскопическое квантовое состояние которой (квантовомеханическое среднее) мы обозначим как  $F_n = \langle \psi_n^*(x), F(x)\psi_n(x) \rangle$  (в классическом случае  $F = F(p, q)$ ). Если известно распределение  $\omega_n$ , то  $\bar{F} = \sum F_n \omega_n$  или  $\bar{F} = \int F(p, q) \omega_{pq} dp dq$ .

Для характеристики отклонения от среднего значения используют дисперсию  $\overline{(\Delta F)^2} = \overline{(F - \bar{F})^2} = \overline{F^2} - (\bar{F})^2$  и относительную флуктуацию  $\delta_F = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\bar{F}}$ .

Основная формула для вероятности флуктуации 1. в случае изолированной системы  $w_\Delta = e^{\Delta S}$  2. в неизолзированной системе  $w_\Delta \sim \exp\left\{\frac{\Delta p \Delta V - \Delta \theta \Delta S - \Delta \mu \Delta N}{2\Theta}\right\}$ .

На примере числа частиц  $\langle n \rangle$  можно показать  $\frac{\sqrt{\overline{(\Delta m)^2}}}{\bar{m}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{m}}}$  - относительная роль флуктуаций возрастает с уменьшением области, в которой они рассматриваются.

*Относительная величина флуктуации:*

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\bar{F}} = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{\bar{f}} \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}};$$

$F = \sum f_i$ , где  $f_i$  - значение  $f$  для  $i$ -й частицы. Относительная флуктуация величина, относящаяся к системе частиц убывает обратно пропорционально квадратному корню из числа частиц и при большом количестве частиц становится бесконечно малой.

*Броуновское движение*

$$\begin{aligned} \vec{r}_n &= \sum_{i=1}^n \vec{q}_i, \langle \vec{r}_n \rangle = 0, \\ \langle \vec{r}_n^2 \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle q_i q_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle q_r \rangle^2 + \sum_{i \neq j} \langle q_i q_j \rangle = \\ &= nb^2 + \langle q_i \rangle \langle q_j \rangle = nb^2 = \frac{t}{\Delta r} b^2 = \alpha t \end{aligned}$$

Чему равно  $\alpha$ ?

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - 6\pi\eta a\dot{\vec{r}}$ , где  $a$  - радиус ч-цы,  $F$  - равнодействующая сил.

$m\ddot{x} = F_x - 6\pi\eta a\dot{x}$  - умножаем на  $x$  :  $m\dot{x}x = F_x x - 6\pi\eta a\dot{x}x$ ;

$$x\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d^2(x^2)}{dt^2} - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 ; x\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$$

уравнение верно и для средних значений (усреднение по ансамблю)

$$\overbrace{\frac{1}{2m} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2}}_{=0, \text{ м.к. } r^2 \sim \alpha t} - \overbrace{m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle}_{\frac{m \langle v_x^2 \rangle / 2}} = \underbrace{\langle x F x \rangle}_{=0} - \underbrace{3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}}_{1/3\alpha} \Rightarrow \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} = 1/2 kT$$

(по теореме о равномерном распределении энергии)

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{3} \alpha$$

$$\langle r^2 \rangle = \alpha t \Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = \frac{1}{3} \alpha t \Rightarrow kT = \pi\eta a \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{kT}{\pi\eta a}$$

- формула Эйнштейна (как видим она не зависит от  $m$ )

## Термодинамика-11. Реальные газы.

### Уравнение Ван-дер-Ваальса.

Для идеальных газов уравнение Клапейрона:  $pV = RT$ . Для реальных газов оно соблюдается лишь приближенно. Отступления от идеальной модели связаны с наличием жидкого и твердого состояний, с наличием межмолекулярного взаимодействия.  $U(x) = \frac{a_1}{x^{12}} - \frac{a_2}{x^6}$  - потенциал взаимодействия (Леннарда-Джонса). С хорошей точностью описывает реальный газ. Здесь  $a_1, a_2$  - константы,  $x$  - расстояние между центрами взаимодействующих частиц. На рисунке 1 (потенциалы Л.-Д. и В.-д.-В.)  $d$  - диаметр молекулы. Рассматриваемая модель газа: твердые шары, упруго сталкивающиеся, причем возможны только парные столкновения (это выполняется довольно точно при небольших давлениях газа). Уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $P$  - давление,  $v$  - объем,  $T$  - температура,  $b$  - поправка на то, что отдельно взятой молекуле предоставлен не весь объем  $v$ , т.к. молекулы не могут сблизиться на расстояние, меньшее  $d$ ;  $a/v^2$  - поправка на то, что на пристеночный слой газа сила со стороны всего газа, стремящаяся втянуть внутрь газа пристеночный слой.  $\frac{a}{v^2} \equiv P_i$  - так называемое внутреннее давление.  $P + P_i = \frac{1}{3}nm\langle v^2 \rangle$  или  $P + P_i = nKT$ , где  $n$  - концентрация,  $m$  - масса частицы,  $v$  - скорость частицы. Для  $b$  можно получить  $b = \frac{2\pi}{3}Nd^3$ . Теоретический вывод уравнения Ван-Дер-Ваальса применим при условии  $b \ll v$ ,  $a/v^2 \ll P$ . В случае плотных газов уравнение Ван-Дер-Ваальса лишь качественно описывает поведение газа. Для реальных газов  $a, b$  зависят от температуры.

*Изотермы Ван-Дер-Ваальса (рисунок 2).*  $T_1 < T_2 < T_3$ . Здесь при  $T_2$  наблюдается критическая изотерма, т.е. при  $T \geq T_2$  уравнение изотермы имеет один корень при  $P = \text{const}$ . Точка  $K$  называется критической.  $P_k = \frac{a}{27b}$ ,  $T_k = \frac{8a}{27Rb}$ ,  $v_k = 3b$ . Уравнение изотермы.

$$Pv^3 - (RT + Pb)v^2 + av - ab = 0$$

Участки типа ВСА соответствуют неустойчивому состоянию вещества и практически не могут быть реализованы.

*Изотермы реального газа (рисунок 3).* Область между кривой ALKG и изобарой  $P = 0$  соответствует двухфазным состояниям вещества, т.е. каждая точка этой области изображает такое состояние вещества, в котором



оно не является физически однородным, а состоит из жидкости и ее насыщенного пара (за исключением случаев неустойчивого состояния в виде перегретой жидкости или пересыщенного пара).

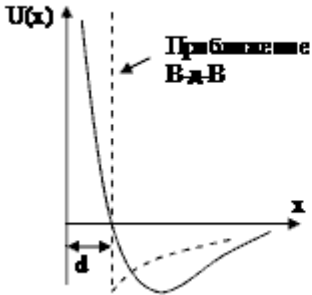


Рисунок 1

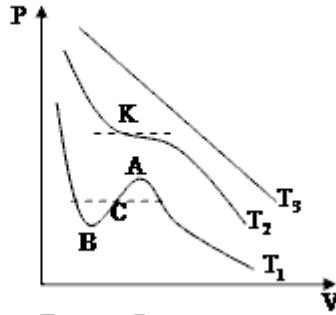


Рисунок 2

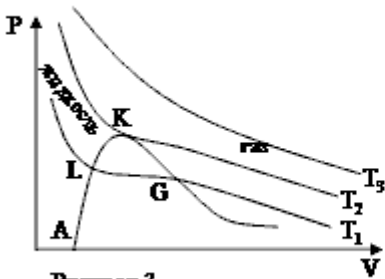


Рисунок 3

# Термодинамика-12. Поверхностные явления.

## 1. Свойства жидкостей:

Изотермический

коэффициент сжатия:  $\gamma = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \sim 10^{-4} \dots 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$  (мало сжимаема) сжимаемость увеличивается с температурой.

Коэффициент теплового расширения  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \sim 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

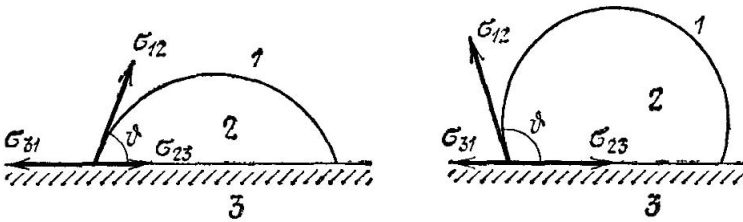
2. Поверхностное натяжение - избыточная потенциальная энергия поверхностного слоя, которая пропорциональна площади поверхности  $S$ :  $U_S = \sigma S$ . Элементарная работа внешних сил для увеличения поверхности:  $dF_{\text{внеш}} = dA = -rmdU_S = \sigma dS = -2\sigma l dx = 2f dx$  (т.к. у пленки две стороны)  $\Rightarrow \sigma = f/l$  - сила приложенная в данный момент к границе раздела в плоскости, касательной к поверхности жидкости.

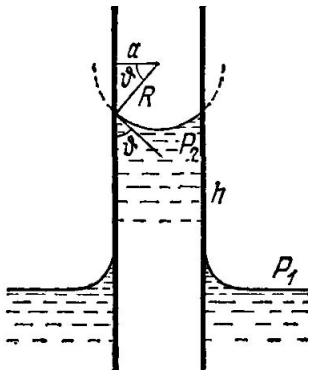
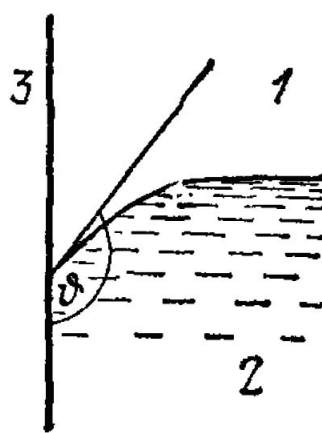
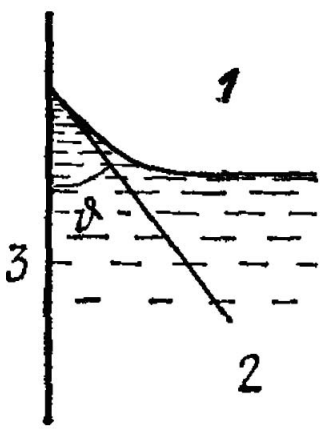
3. Давление под искривленной поверхностью. Дополнительное давление за счет пов. натяжения:  $\Delta p = \frac{\sigma 2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}$  где  $R$  - радиус кривизны поверхности. В общем виде формула Лапласа:  $\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , где  $R_1$  и  $R_2$  - радиусы кривизны в двух взаимноперпендикулярных сечениях, проведенных через нормаль к поверхности в данной точке. В частности для цилиндрических поверхностей  $R_1 = \infty$ , следовательно  $\Delta p = \sigma \frac{1}{R}$ .

## 4. Смачивание и не смачивание

5. Капиллярное явление [картинка;  $R$  - радиус кривизны поверхности,  $r$  - радиус цилиндра,  $\theta$  - угол смачивания] Давление под искривлённой поверхностью меньше  $p_{\text{атм}}$  на  $p_{\text{Лапласа}}$ .

$R = r/\cos\theta$ . равновесие  $\rho gh = 2\sigma/r = (2\sigma/r) \cos\theta \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r\rho g}$  - формула Жюрене.





## Термодинамика-13. Твердые тела. Кристаллы. Симметрия кристаллов.

Твердое состояние возникает при столь сильном взаимодействии между молекулами, что их тепловое движение не играет в структуре значительной роли.

Молекулы располагаются друг относительно друга в фиксированных точках, совершая малые тепловые колебания около положения равновесия. Взаимное расположение молекул повторяется при переходе из одних областей в другие, то есть, имеем периодич. структуру, что реализуется в виде кристаллической решетки.

Точки равновесия молекул - узлы кристаллической решетки.

Аморфные тела не находятся в состоянии равновесия.

Примитивная решетка ( решетка Браве ):  $r = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3$ ,  $n_1, n_2, n_3$  - целые числа,  $a_1, a_2, a_3$  - базисные вектора элементарной ячейки; параллелепипед  $a_1a_2a_3$  - базисная ячейка.

Некоторая произвольная решетка, вообще говоря, не может быть представлена в виде одной решетки Браве, а является совокупностью решеток Браве. Браве показал, что можно всегда найти такую примитивную ячейку, которая имеет те же элементы симметрии, что и решетка в целом (кроме гексогональных).

Примечание: под симметрией понимается совокупность элементов симметрии.

Элементы симметрии:

1. ось  $n$ -го порядка - нет изменений при повороте на  $2\pi/n$ .
2. плоскость сим. - совмещение в результате зеркального отражения.
3. центр сим. - при инверсии отн. точки тело совмещается с собой.
4. Зеркально-поворотная ось  $n$ -го порядка - поворот на  $2\pi/n$  и зеркальная симметрия.

У кристаллической решетки возможна ось вращения 2, 3, 4, 6-го порядков. Наименьшая из примитивных ячеек называется параллелепипедом Браве. Существует 6 типов пар. Браве + гексогональная, итого 7 типов.

Типы решёток:

1. Триклинная  $a_1 \neq a_2 \neq a_3, \alpha \neq \beta \neq \gamma$

2. Моноклинная  $a_1 \neq a_2 \neq a_3, \alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
3. Ромбическая  $a_1 \neq a_2 \neq a_3, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
4. Тетрагональная  $a_1 = a_2 \neq a_3, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
5. Кубическая  $a_1 = a_2 = a_3, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
6. Ромбоэдрическая  $a_1 = a_2 = a_3, \alpha = \beta = \gamma < 120^\circ \neq 90^\circ$
7. Гексагональная  $a_1 = a_2 \neq a_3, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$

[картинки типов решёток]

## Термодинамика-14. Фазовые переходы. Условия устойчивого равновесия.

В качестве объекта исследования микроскопически бесконечно малое изменение ТД состояния (из 1 в 2); отличие  $dX = X_2 - X_1$  бесконечно мало. Для квазистатических процессов (перехода)  $\theta dS = \delta Q = dE + pdV - \mu dN$ , для неквазистатических -  $\theta dS > \delta Q' = dE + p'dV - \mu'dN$  (\*). Рассмотрим условия равновесия для различного рода зафиксированных неравновесных систем. (Примечание: вариации производятся по тем параметрам системы которые при указанных фиксированных условиях

1. *Адиабатически изолированная система*  $\varepsilon, V, N = \text{const}$ , следовательно из из (\*)  $(dS)_{\varepsilon, V, N} > 0$ .  $S_{\text{max}} = S_{\text{равн}}(\varepsilon, V, N)$  - энтропия возрастает до  $S_{\text{max}}$  - состояния ТД равновесия, т.е.  $(\delta S)_{\varepsilon, V, N} = 0$  - н.у. экстремума (усл. ТД равновесия), а  $(\delta^2 S)_{\varepsilon, V, N} < 0$  - условие максимума в точке экстремума и одновременно условие устойчивости равновесного состояния.
2. *Система в термостате*  $\theta, V, N = \text{const}$ . . Из (\*)  $[\theta dS > d\varepsilon]_{\theta V N} \rightarrow [d(\varepsilon - \theta S)]_{\theta V N} = (dF)_{\theta V N} < 0$ . Течение неравновесных процессов в системе «термостат» сопровождается уменьшением её свободной энергии, где  $F_{\text{min}} = F_{\text{равн}}(\theta, V, N)$  и  $(\delta F)_{\varepsilon, V, N} = 0$  и  $(\delta^2 F)_{\varepsilon, V, N} > 0$ .
3. *Система, выделенная воображаемыми стенками*  $\theta, V, \mu = \text{const}$ ,  $\Omega(\theta, V, \mu) = \Omega_{\text{min}}$  т.к. из (\*)  $(d\Omega)_{\theta V \mu} < 0$ ,  $(\delta\Omega)_{\theta V \mu} = 0$ ,  $(\delta^2\Omega)_{\theta V \mu} > 0$ .  $\Omega = \varepsilon - \theta S - \mu N$  - большой ТД потенциал  $\Omega$ .
4. *Система под поршнем*  $P, \theta, N = \text{const}$ , из(\*)  $\Rightarrow [d(\varepsilon - \theta S + pV)]_{\theta P N} = [dG]_{\theta P N} < 0$ , ТД равновесие наступает при  $G(\theta, P, N) = G_{\text{min}}$ ,  $G$  - ТД потенциал Гиббса. Усл равновесия:  $(\delta G)_{\theta P N} = 0$ , усл. Устойчивости:  $(\delta^2 G)_{\theta P N} > 0$ .  $G = \varepsilon - \theta S + pV = F + pV$ .

Пример устойчивости, устойчивость к тепловому воздействию на систему. Рассмотрим ч/з вариант б)  $\delta F = 0$ ,  $\delta^2 F > 0$  дают  $C_p N > C_V N > 0$  - условие устойчивости к нагреванию системы под поршнем.

*Общее условие равновесия фаз в ТД системах.* Рассмотрим однокомпонентную систему, находящуюся в заданных ТД условиях («газ под поршнем») в двухфазном состоянии. Фазы - ТД устойчивы и пространственно

однородны, т.е.  $\theta$  и  $p$  общие, тепловых потоков и механических перемещений нет, следовательно исследуем только условие равновесия по отношению к изменению количества вещества.

$$\begin{cases} (\delta G) = 0 \Rightarrow \delta(\mu_1(E, p)N_1 - \mu_2(E, p)N_2) = 0, \\ \delta N = \delta(N_1 - N_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_1(\theta, p) = \mu_2(\theta, p) (**)$$

Решая ур-е (\*\*) получим  $p = p(\theta)$  - график сосуществования фаз (в плоскости  $p-\theta$ ). В более общем случае  $k$  компонент и  $n$  фаз условия фазового уравнения представляют собой систему  $k(n - 1)$  уравнений.

*Правило фаз Гиббса:*  $f = 2 + k - n$  - число степеней свободы при реализации  $n$ -фазного состояния в  $k$ -компонентной системе.

*Фазовые переходы I рода* Вернёмся к рассмотрению 1-компонентной (например, только вода) 2-фазной системе (жидкость-газ).  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - аналитически не известны, зависимость  $p = p(\theta)$  снимают эмпирически. Однако  $\frac{\partial \mu(\theta, p)}{\partial \theta} = -S(\theta, p)$  и  $\frac{\partial \mu(\theta, p)}{\partial p} = -v(\theta, p)$  можно измерить экспериментально.

**Определение:** если  $\frac{\partial \mu}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial \mu}{\partial p}$  имеют для разных фаз в точках  $\mu_1(\theta, p) = \mu_2(\theta, p)$  разные значения, то такой фазовый переход называется ф.п. 1 рода.

Особенности:

1. скрытая теплота ф.п. 1  $\rightarrow$  2:  $q_{12} = \theta \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu_2}{\partial \theta} \right) = -q_{21} \neq 0$  - скачек  $\frac{\partial \mu}{\partial \theta}$ .
2. скачок удельный объём  $\frac{\partial \mu}{\partial p}$ :  $\delta v = v_2 - v_1 = \frac{\partial \mu_2}{\partial p} - \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \neq 0$ .

Пример: кипение, испарение, плавл ТВ т, возгонка тт, переход одной кристалл модификации в др. Уравнение кривой фаз-го равновесия  $\frac{dp}{d\theta} = \frac{q_{12}}{\theta(v_2 - v_1)}$ .

*Фазовые переходы II рода.*

**Определение** В точке фазового перехода производные  $\frac{\partial \mu}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial \mu}{\partial p}$  не терпят разрыва и  $p = p(\theta)$  определяется тремя условиями:

$$\begin{cases} \delta \mu(\theta, p) = \mu_2 - \mu_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta \mu = 0, \\ \frac{\partial}{\partial p} \Delta \mu = 0, \end{cases}$$

т.е. переходы без скрытой теплоты и без скачка плотности - ФП 2 рода.

*Пример:* переход проводника из сверхпроводящего состояния в нормально.

*Отличия:* Скачек  $\Delta C_p \neq 0$ :  $\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p \neq 0$  скачек к-та теплового расширения,  
 $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_\theta \neq 0$  - скачек к-та упругости. Уравнения Эренфеста

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{d\theta} = \frac{\Delta C_p}{\theta \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p}, \\ \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_\theta \Delta C_p + \theta \left[\Delta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p\right]^2 = 0. \end{array} \right.$$



## Термодинамика-15. Явления переноса в газах.

Явления переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость.

*Теплопроводность.* Перенос теплоты.  $J_Q = -\xi \frac{dT}{dx}$ .  $\xi$  - коэффициент теплопроводности,  $\xi = \frac{1}{3}n\lambda\langle v \rangle \frac{C_v}{N_A}$ ,  $n$  - концентрация,  $C_v = \frac{i}{2}R$  - молярная тепло емкость,  $i$  - число степеней свободы. Теплопроводность не зависит от давления и увеличивается пропорционально корню квадратному из температуры.

*Диффузия.* Движение вещества компонент, составляющих фазу, связанное с отклонением плотности системы.  $J_N$  - плотность диффузионного потока (кол-во вещ-ва, проходящего ед. площади перпендикулярно направлению в ед. времени).  $J_q = -D \frac{dq}{dx}$  - з-н Фика. Коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle$ ,  $\lambda$  - длина св. пробега,  $\langle v \rangle$  - ср. скорость.

Замечания:  $D \sim 1/p$ ,  $p$  - давление,  $D \sim \sqrt{T}$ .

*Вязкость.* Возникновение сил трения в газах и жидкостях обусловлено процессом переноса импульса упорядоченного движения молекул. Быстрее движущийся слой замедляется, а медленнее движущийся ускоряется.  $J_L = -\eta \frac{du}{dx}$ ,  $u$  - скорость движения системы как целого,  $\eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v \rangle \rho$ . Замечания:  $\eta$  не зависит от  $p$  и  $\sim \sqrt{T}$ .

# Термодинамика-16. Кинетическое уравнение Больцмана. Понятие об H-теореме Больцмана.

*Задача:* найти ур-ие для интеграла столкновения частиц.

*Предположения:*

1) Рассматриваем только парные вз-ия, где радиус действия  $R_0 \ll a = \sqrt[3]{V/N}$ , время столкновения  $\tau_{cm} \sim R_0/v \ll \tau_{св.нр.}$ . Рассматриваем пространно однозначные системы  $U(r) = 0$ .

2) Решение будем искать в виде статистич. функции  $F_{1,2}$ , т.е. ф-ций определяющих число частиц в объёме  $d\vec{p}d\vec{r}$ . Исходить будем из первого уравнения цепочки Боголюбова (можно получить тоже из з-нов сохр. энергии и импульса).

$$\frac{\partial F(t, \vec{r}, \vec{p})}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = \Phi(r, p|F_2); \quad (1)$$

$\Phi$  зависит от  $t$  через зависимость  $F_2$  от  $t$ . Пусть  $R_0^3/v \ll 1$ , используем принцип ослабления:

$$F_2(t, x_3, x_2)|_{|r_1-r_2| \rightarrow -\infty} \rightarrow F_1(t, x_1)F_1(t, x_2); \quad x_i = (r_i, p_i), \quad (2)$$

запишем уравнени Лиувилля для системы 2-х частиц:

$$\frac{\partial F_1(t, x_1)}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} = \frac{1}{v} \int \frac{\partial \Phi(|r_1 - r_2|)}{\partial r_1} \frac{\partial F_2(t, x_1, x_2)}{\partial p_1} dr_2 dp_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(t, x_1, x_2)}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \frac{\partial F_2}{\partial r_1} + \frac{p_2}{m} \frac{\partial F_2}{\partial r_2} - \frac{\partial(\Phi(|r_1 - r_2| + U(r_1))}{\partial r_1} \frac{\partial F_2}{\partial p_1} - \\ - \frac{\partial \Phi((|r_1 - r_2|) + U(r_2))}{\partial r_2} \frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

далее используя условие эволюции, полагая  $U = 0$ ,  $R = |r_1 - r_2|$ , упрощая (4) и подставляя выражение для  $F_2$  в (3), получим интеграл столкновения (кинетическое уравнение) Больцмана

$$\frac{\partial F_1(t, r, p)}{\partial t} = \frac{1}{v} \int (F_1(t, r, p'_1)F_1(t, r, p') - F_1(t, r, p_1)F_1(t, r, p)) u dv dp_1 \quad (5)$$

*H-теорема Больцмана.* Введём:

$$F = (2\pi\hbar)^3 \frac{1}{v} f$$

и введём

$$H(t) = \int F(t, r, p) \ln F(t, r, p) \frac{dpdr}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Исследуем знаки производной  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}$ . После преобразований придем к неравенству:  $\frac{dH}{dt} \leq 0$ . Ур-ие Больцмана описывает необратимую во времени эволюцию системы.

# Термодинамика-17. Плазменное состояние вещества. Уравнение Власова.

*Плазма* - квазинейтральный ионизированный газ, состоящий из большого количества положит. и отриц. заряженных частиц, а в ряде случаев из нейтральных атомов и молекул.

Параметры плазмы: концентрация плотность частиц разного сорта ( $N_\alpha$ ), степень ионизации  $r = N_e/N_n$ , заряд и масса частиц, температура плазмы.

*Условие квазинейтральности:* газ (плазма) в среднем за достаточно большие промежутки времени и на дост. больших расстояниях должен быть в целом нейтральным.

*Временной масштаб разделения зарядов:*  $\tau = 1/\omega_{Le}$ , где  $\omega_{Le}$  — плазменная частота. При  $t \gg \tau$  частицы совершают много колебаний около положения равновесия.

*Пространственный масштаб разделения зарядов:*  $d \approx r_{De} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T_e}{e^2 N_e}}$  - электрический Дебаевский радиус. Условие квазинейтральности: характерные размеры  $L \gg r_{De}$ .

Для вывода уравнения Власова используем статистическое описание системы частиц: вводится ф-ция распределения, характеризующая вероятность нахождения частицы в определенном состоянии в момент времени  $t$  в заданной точке пр-ва  $\vec{r}$ . Если состояние частицы сорта  $\alpha$  характеризуется импульсом  $p_\alpha$  и её энергия однозначно определяется этим импульсом  $\varepsilon_\alpha(p)$ , то ф-ция распределения  $f_\alpha = f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t)$ . Величина  $f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t)d\vec{p}d\vec{r}$  представляет число частиц сорта  $\alpha$  в момент времени  $t$  в фазовом интервале  $dpdr$ , а плотность частиц в точке  $r, t$ :  $\int dp f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t)$  — условие нормировки.

Зная функцию распределения можно найти ср. значения, например:

$$\langle \vec{v}_\alpha \rangle = \frac{\int f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) \vec{v} d\vec{p}}{N_\alpha(\vec{r}, t)}; \quad \langle \varepsilon_\alpha \rangle = \frac{\int f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) \varepsilon(p) d\vec{p}}{N_\alpha(\vec{r}, t)}.$$

Если в объёме не происходит рождения и гибели частиц, то ф-ция  $f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t)$  не меняется во времени и

$$\frac{df_\alpha(p, r, t)}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\alpha} \frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

– ур-ие непрерывности (Лиувилля).

Согласно ур-ям движения частиц:  $\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} = \vec{F}_\alpha$ ,  $\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = \vec{V}$ , тогда (1):  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha} \vec{F}_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\alpha} \vec{V} = 0$ ,  $F_\alpha$  - сила, действующая на частицу сорта  $\alpha$ ,  $F_\alpha = e_\alpha \{E + [vB]\}$  в случае заряженных частиц.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha} e_\alpha \{E + [vB]\} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\alpha} \vec{V} = 0$$

- ур-ие Власова.

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  - эл. и магн. поля в точке нахождения частицы определяются из Ур-ий Максвелла:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}_0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}.$$

Здесь  $\vec{j}$  и  $\rho$  - плотность тока и заряда, индуцируемых в среде,  $\vec{j}_0$  и  $\rho_0$  - плотность тока и заряда внешних источников,  $c$  - скорость света.  $c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ,  $\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) dp$ ,  $\vec{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{V} f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) dp$ . Введённые таким образом поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , являясь самосогласованными, поскольку из ур-ия Власова получается такое распределение частиц, которое вызывает появление э-м полей, поддерживающих это распр.

# Электростатическое поле. Закон Кулона. Теорема Гаусса. Мультипольное разложение.

## Основные понятия

- $Q$  - заряд (источник поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , связанный с материальным носителем),
- $\rho(\vec{r}, t)$  - объемная плотность заряда,  $\int_V \rho dV = Q$
- $\vec{j}$  - плотность тока  $\vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{def}{=} \rho(\vec{r}, t)\vec{v}$ , где  $\vec{v}$  - скорость объемной структуры зарядов.
- $I$  - ток зарядов через ограничивающую их поверхность,  $I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$

*Закон Кулона* Для точечных покоящихся зарядов сила их взаимодействия

$$\vec{F} = \frac{qQ}{R^3} \vec{R},$$

где  $q, Q$  - величины зарядов.

Сила, действующая на  $q$  со стороны  $Q$

$$\vec{F} = q\vec{E}_Q = q\frac{Q}{R^2} \vec{R},$$

где  $\vec{R}$  - направление от  $Q$  к  $q$ . Таким образом,  $\vec{R}$  в з-не Кулона определяет направление от «действующего» к «подверженному действию» заряду.

Напряженность, создаваемая зарядом  $Q$  в точке  $\vec{R}$ :

$$\vec{E}_Q \stackrel{def}{=} \frac{Q}{R^3} \vec{R}$$

*Дифференциальный закон Кулона* Рассмотрим поток электрического поля, создаваемого зарядом  $Q$  через произвольную ограничивающую его поверхность  $S$ . Тогда

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \frac{Q}{R^3} \vec{R} d\vec{S}.$$

Без ограничения общности можно считать  $S$  сферой, тогда  $\vec{R} = R\vec{n}$ :

$$\oint_S \frac{Q}{R^3} \vec{R} d\vec{S} = \oint_S \frac{Q}{R^3} (R\vec{n}) dS.$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\oint_S \frac{Q}{R^3} R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \oint_S Q d\Omega = Q \cdot 4\pi.$$

Таким образом

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q$$

По теореме Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S},$$

где  $V$  - объём, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Тогда  $\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho dV$ , то есть

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) dV = 0.$$

Это выполнено для любого объёма  $V$ . Отсюда получаем закон Кулона в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

*Мультипольное разложение потенциала.* В электростатике уравнение для потенциала  $\varphi(\vec{r})$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Его решение через запаздывающий потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\varphi(\vec{r})$  - потенциал, создаваемый в точке  $\vec{r}$  объёмной структурой зарядов  $\rho(\vec{r}')$ ,  $\vec{r}'$  - переменная интегрирования, пробегающая область  $V$  расположения распределённого заряда  $\rho(\vec{r}')$ , причём  $|\vec{r}'|/|\vec{r}| \ll 1$ . Разлагая подынтегральную функцию  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  в ряд по малому параметру  $|\vec{r}'|/|\vec{r}|$  с точностью

до квадратичного члена:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} &\approx \frac{1}{r} + (-x'_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} + 1/2 x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left( \frac{1}{r} \right) = \\
 &= \frac{1}{r} - x'_\alpha \left( -\frac{1}{r^2} \right) \frac{x_\alpha}{r} + 1/2 x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{-x_\alpha}{r^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{x'_\alpha x_\beta}{r^3} + 1/2 x'_\alpha x'_\beta \frac{1}{r^6} \left( -\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} r^3 + x_\alpha 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x_\beta} \right) = \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^6} x'_\alpha x'_\beta (3r x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^3) = \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} x'_\alpha x'_\beta (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})
 \end{aligned}$$

Получаем:

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

где  $Q = \int_V \rho dV$ ,  $\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$  - дипольный момент,  $D_{\alpha\beta} = \int_V dV \rho(\vec{r}) (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$  - квадрупольный момент.



## Электродинамика-2. Статическое магнитное поле. Закон Био-Савара-Лапласа. Электромагнитная индукция.

Приближение линейного проводника  $S \ll L^2$ , тогда

$$\begin{cases} \vec{j} d\vec{S} = j dS \\ \vec{j} dl = j d\vec{l} \end{cases}$$

Закон (Ампера-)Био-Савара-Лапласа: поле создаваемое электрическим током

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{l} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] }{(\vec{r} - \vec{r}')^3}$$

Ток в линейном проводнике  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ , где  $S$  - сечение проводника, отсюда

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \oint_L d\vec{H} = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} \oint_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3} = \\ &= \frac{1}{c} \int_S \oint_L d\vec{S} d\vec{l} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{c} \int_V dV \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

$V$  - объем проводника. Можно показать, что

$$[\vec{j}(\vec{r}'), \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}] = \text{rot}_{\vec{r}'} \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Таким образом, поле, создаваемое круговым током  $I$  в точке  $\vec{r}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \text{rot}_{\vec{r}'} \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

*Электромагнитная индукция.* Закон Фарадея

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{H} d\vec{S})$$

где  $S$  - незамкнутая поверхность, наятнутая на контур  $L$ . По формуле Стокса  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$ , откуда, в силу произвольности контура  $L$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

### Электродинамика-3. Уравнения Максвелла в вакууме. Скалярный и векторный потенциал. Калибровочная инвариантность.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

Вихревое магн. поле создается меняющимися электрическими и всеми токами, вихревое электрическое создается меняющимися магнитными и направлено так, чтобы компенсировать изменение магнитного поля. Магнитных зарядов не существует, а электрическое поле создается электрическими зарядами. Т.к.  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , то  $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ , где  $\vec{A}$  наз. векторным потенциалом, т.к.  $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot}(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv -\nabla\varphi$ .  $\varphi$  - скалярный потенциал.

Запишем систему уравнений для потенциалов:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \\ = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left( -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A}. \end{cases}$$

Из 1го уравнения:

$$\nabla \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

В калибровке Лоренца  $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , откуда

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Из 2го уравнения

$$\nabla \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\Delta \varphi \Rightarrow \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

Эти уравнения называют уравнениями для потенциалов.

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \\ \nabla\varphi = -\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

$\vec{A}$  опеределён с точностью до  $\nabla\chi$ :  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \Rightarrow \vec{H} = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla\varphi = -\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} &\Rightarrow \nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = -\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} & \end{aligned}$$

Таким образом преобразования вида

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases}$$

ничего не меняют - поле остается таким же

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}' \\ \vec{E}' = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \end{cases}$$

Это свойство называется калибровочной инвариантностью.

## Электромагнетизм-4. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойтинга.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

Т.к.

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$$

Подставляя первые 2 ур-я Максвелла в это выражение, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] &= \vec{H} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \vec{E} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\partial E^2}{\partial t} \right\} - \frac{4\pi}{c} (\vec{E} \vec{j}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\vec{E} \vec{j}) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (H^2 + E^2) \end{aligned}$$

Вводя  $w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$  - плотность энергии ЭМ поля,  $\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$  - вектор Умова-Пойтинга, получим

*Закон сохранения энергии ЭМ поля*

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{E} \vec{j}) + \operatorname{div} \vec{\sigma}$$

Энергия поля уходит на совершение работы  $(\vec{E} \vec{j})$  и на излучение  $\vec{\sigma}$ . Вектор Умова-Пойтинга  $\vec{\sigma}$  суть энергия, проходящая в ед. времени через ед. площади

Пусть система из  $N$  зарядов заключена в объеме  $V$ , тогда  $\vec{j} =$

$$\sum_{i=1}^N e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)),$$

$$\begin{aligned} (\vec{j} \vec{E}) &= \sum_{i=1}^N e_i (\vec{v}_i \vec{E}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = \sum_{i=1}^N e_i (\vec{v}_i, \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}]) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^N (e_i \vec{E} + \frac{e_i}{c} [\text{vecv}_i \vec{H}], \vec{v}_i) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_V (\vec{E} \vec{j}) dV = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \vec{v}_i) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i, \vec{F}_i(\vec{r}_i)) = \frac{dE_{кин}}{dt} \end{aligned}$$

$E_{кин}$  - энергия кинетическая заряженной частицы. Интегрируя з.с.э. по объёму, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV + \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV + \int_V (\vec{e} \vec{j}) dV = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( E_{кин} + \int_V w dV \right) + \oint_S \vec{\sigma} d\vec{S} = 0$$

**Электромагнетизм-5. Излучение электромагнитных волн в электрическом дипольном приближении. Радиационное трение.**

*Излучение в дипольном приближении*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

Уравнения для потенциалов

$$\begin{cases} \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \square \varphi = -4\pi\rho \end{cases}$$

где  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . Решение в виде запаздывающих потенциалов:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Приближения  $a \ll \lambda \ll r$  ( $a$  - характерный размер области с зарядами) - случай излучения в волновой зоне.

Разложим в решении подынтегральное выражение в ряд, ограничиваясь дипольным приближением:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r + \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} (-x_\alpha) = r - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{r} = r - \vec{n}\vec{r}', \text{ где } \vec{n} = \vec{r}/r.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) &\approx \rho(\vec{r}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{\tau} + \underbrace{\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}}_{\text{лок. зап.}}) \approx \\ &\approx \rho(\vec{r}', \tau) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} + 1/2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} \left( \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

т.к. локальное запаздывание много меньше периода колебаний зарядов  $T$  внутри зоны зарядов. Тогда для  $\varphi(\vec{r})$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &\approx \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}', \tau) dV' + \frac{\vec{n}}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau) dV' + \\ &\quad + \frac{1}{2rc^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_V \rho(\vec{r}', \tau) n_\alpha n_\beta x'_\alpha x'_\beta dV' \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \int_V dV' \rho(\vec{r}', \tau), \\ \dot{\vec{d}}(\tau) &= \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau) dV', \\ Q_{\alpha\beta} &= \int_V 3x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}', \tau) dV' \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{Q(\tau)}{r}, \varphi_1 = \frac{(\dot{\vec{d}}(\tau), \vec{n})}{cr}, \varphi_2 = \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{6cr}, \\ \varphi &\approx \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}$$

Аналогично для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, \tau) \approx \frac{1}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV' = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} = \vec{A}_1$$

Итак, излучение в эл. дипольном приближении:

$$\varphi_1 = \frac{(\dot{\vec{d}}\vec{n})}{cr}; \quad \vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr}$$

Получим выражение для напряжённости магнитного поля:

$$\begin{aligned}\vec{H} = \text{rot } \vec{A} &= \left[ \vec{\nabla}, \frac{\dot{d}}{cr} \right] = \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{cr}, \dot{d} \right] + \left[ \frac{1}{cr} \vec{\nabla}, \vec{\dot{d}} \right] = \left\{ \nabla \vec{d} = \frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{\nabla \tau}_{-\vec{n}/c} \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \left[ -\frac{1}{r^2} \nabla r, \dot{d} \right] + \frac{1}{c^2} \left[ -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}, \dot{d} \right] \approx \frac{1}{cr} \left[ -\frac{\vec{n}}{c}, \ddot{d} \right] = \frac{[\dot{d}\vec{n}]}{c^2 r}\end{aligned}$$

То есть,

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} [\dot{d}\vec{n}]$$

Получим теперь выражение для напряжённости электрического поля

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \left( \frac{[\dot{d}\vec{n}]}{cr} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{d}}{cr} \right) = \left\{ \nabla = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right\} = \\ &= \frac{\vec{n}}{c} \frac{[\dot{d}\vec{n}]}{cr} - \frac{\dot{d}}{c^2 r} = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{n} [\vec{n} \ddot{d}] \right]\end{aligned}$$

То есть,

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{n} [\vec{n} \ddot{d}] \right] = [\vec{H}\vec{n}]$$

*Интенсивность излучения*

$$\begin{aligned}dI &= (\vec{\sigma}, d\vec{S}), d\vec{S} = \vec{n} dS, \\ dS &= r^2 d\Omega, \vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}].\end{aligned}$$

отсюда угловое распределение интенсивности

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \left[ \left[ \frac{\dot{d}}{cr} \right] \vec{n} \right]^2$$

полная интенсивность

$$I = \frac{2}{3c^3} |\ddot{d}|^2$$

*Радиационное трение*

$$\begin{cases} \frac{dE_{\text{васм}}}{dt} = (\vec{F} \vec{v}) - I = (\vec{F} \vec{v}) + (\vec{F}_{p.mp.} \vec{v}), \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{p.mp.} \end{cases}$$



$$(\vec{F}_{p.mp} \cdot \vec{v}) = -I = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{r}^2$$

Усреднение работы  $F_{p.mp}$  по периоду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (\vec{F}_{p.mp} \cdot \vec{v}) = - \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

Выберем  $t_1$  и  $t_2$  так, что  $\dot{r}(t_1) = \dot{r}(t_2)$ ,  $\ddot{r}(t_1) = \ddot{r}(t_2)$ . Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} I dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{r}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} (\ddot{r} \dot{r}) \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{r} \ddot{r} dt$$

и для силы радиационного трения получим

$$\vec{F}_{p.mp} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r}.$$

# Электродинамика-6. Уравнения Максвелла в среде. Материальные уравнения. Комплексная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления и их электромагнитные свойства.

Уравнения Максвелла в среде Микроскопические уравнения для вакуума

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{полн}} \\ \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{h} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \rho_{\text{полн}} \end{cases}$$

Закон сохранения заряда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\text{полн}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{полн}} &= 0 \\ \vec{j}_{\text{полн}} &= \vec{j}_{\text{своб}} + \vec{j}_{\text{связ}} \\ \rho_{\text{полн}} &= \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}, \end{aligned}$$

следовательно, для каждой отдельной частицы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{своб}} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{связ}} &= 0. \end{aligned}$$

Усредним:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \vec{j} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \langle \rho_{\text{связ}} \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\langle \rho_{\text{связ}} \rangle \equiv -\operatorname{div} \vec{P},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_{\text{связ}} \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = 0 &\Rightarrow -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \left( \langle \vec{j}_{\text{связ}} \rangle - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

можно представить в виде вихря:

$$\langle \vec{j}_{связ} \rangle - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{M}.$$

Итак:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{связ} \rangle &= -\operatorname{div} \vec{P}, \\ \langle \vec{j}_{связ} \rangle &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}. \end{aligned}$$

Векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{M}$  связаны с наличием вещества, но сами определены неоднозначно. Положим вне вещества  $\vec{P} = 0$ ,  $\vec{M} = 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{j}_p &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \text{плотность тока поляризованности} \\ \vec{j}_M &= c \operatorname{rot} \vec{M} - \text{плотность тока намагниченности} \end{aligned}$$

Усредним уравнения Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \langle \vec{h} \rangle = \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{e} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left( \langle j_{своб} \rangle + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} \right) \\ \operatorname{rot} \langle \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{h} \rangle}{\partial t} \\ \operatorname{div} \langle \vec{h} \rangle = 0 \\ \operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle = 4\pi (\langle \rho_{своб} \rangle - \operatorname{div} \vec{P}) \end{array} \right.$$

Обозначим:  $\rho \equiv \rho_{своб}$ ,  $\vec{j} = \vec{j}_{своб} \Rightarrow \vec{E} \equiv \langle \vec{e} \rangle$ ,  $\vec{B} \equiv \langle \vec{h} \rangle$  (NB. именно так!), тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho \end{array} \right.$$

Введём обозначения  $\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ ,  $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ . Окончательно, уравнения Максвелла в среде запишутся в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}, \text{внешн. усл.}) \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}, \text{внешн. усл.})\end{aligned}$$

При неизменных внешних условиях:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{E}, \vec{H})\end{aligned}$$

Разлагая в ряд получим:

$$D^\alpha \approx d^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta + \dots, B^\alpha \approx b^\alpha + \mu^{\alpha\beta} H_\beta + \dots$$

В наиболее распространенных случаях:  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Условия применимости:

1. Неподвижные вещества
2. Постоянство внешних параметров
3. Малость внешних полей по сравнению с полем внутри атомных систем
4. Однородность и изотропность вещества

*Комплексная диэлектрическая проницаемость*

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Пусть

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \varepsilon (-i\omega) \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon \vec{E} + i \frac{4\pi \sigma \vec{E}}{\omega} \right\} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{D}}{\partial t}$$

Таким образом, комплексную часть  $\varepsilon$  можно формально включить в ток смещения,  $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ .

Пусть в одноатомном нейтральном газе распространяется плоская монохроматическая волна

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \tilde{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \\ \vec{H} &= \tilde{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\end{aligned}$$

Происходит поляризация атомов среды и в ней возникает переменный электрический дипольный момент, то есть возникает вектор поляризации

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon(\omega)\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi N\vec{d} \\ \varepsilon\vec{E} &= \vec{E} + 4\pi N\vec{d} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varepsilon - 1)\vec{E} &= 4\pi N\vec{d}\end{aligned}$$

Определим  $d$  на основании осцилляторной модели атома

$$\begin{aligned}m\ddot{\vec{R}} + m\gamma\dot{\vec{R}} + m\omega_0^2(\vec{R} - \vec{R}_0) &= \vec{F} = e\left(\tilde{\vec{E}}_0 + \frac{1}{c}[\dot{\vec{R}}, \tilde{\vec{H}}_0]\right) \Rightarrow (\vec{r} \equiv \vec{R} - \vec{R}_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} &= e(\vec{E}_0 + \frac{1}{c}[\dot{\vec{r}}, \tilde{\vec{H}}_0])e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},\end{aligned}$$

где  $\vec{E}_0 = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-ik\vec{R}_0}$ ,  $\vec{H}_0 = \tilde{\vec{H}}_0 e^{-ik\vec{R}_0}$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} &= e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Big|_{\cdot \frac{e}{m}} \Rightarrow \\ \ddot{\vec{d}} + \gamma\dot{\vec{d}} + \omega_0^2\vec{d} &= \frac{e^2}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Рассмотрим частное решение в установившемся режиме:  $\vec{d} = \vec{d}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{d}_0(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) = \frac{e}{m}\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{d} = \frac{e^2\vec{E}_0}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega]}e^{-i\omega t}$$

$$\vec{P} = N\vec{d} = \frac{Ne^2\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}e^{-i\omega t}$$

Пусть

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \approx \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{Ne^2(\omega_0^2 + \omega^2 + i\gamma\omega)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}\vec{E}$$

Вспоминая, что  $\vec{P} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)\vec{E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2}$$

Обозначим  $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

$$\varepsilon''(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

# Электродинамика-7. Диэлектрики, магнетики, проводники,

## сверхпроводники и их электромагнитные свойства

*Диэлектрики* При помещении диэлектрика во внешнее электростатическое поле происходит поляризация- внутри объема диэлектрика и на его поверхности может возникнуть ненулевая плотность связанных зарядов. Поэтому при взаимодействии связанных зарядов между собой и со внешним электростатическим полем возникает объемная электрическая сила, которая стремится деформировать диэлектрик и сместить его в пространстве. Данная объемная сила вычисляется по формуле:

$$\vec{F} = \rho \vec{E} - \frac{E^2}{8\pi} \nabla \varepsilon + \nabla \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right),$$

где  $\tau$  - массовая плотность вещества  $\tau = \frac{m}{V}$ ,  $\rho \vec{E}$  - сила, действующая со стороны поля на свободные заряды,  $-\frac{E^2}{8\pi} \nabla \varepsilon$  - сила, действующая в результате неоднородности диэлектрика,  $\nabla \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)$  - неоднородность внешнего поля и стрижия вещества  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$ .

Силу  $\vec{F}$  можно выразить через тензор натяжений Максвелла:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \frac{\varepsilon E_{\alpha} E^{\beta}}{4\pi} - \frac{E^2}{8\pi} \delta_{\alpha}^{\beta} \left( \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right),$$

тогда

$$F_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} T_{\alpha}^{\beta}$$

Полная сила получается интегрированием по объёму диэлектрика

$$\mathcal{F}_{\alpha} = \int_V dV F_{\alpha} = \int_V dV \frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \oint_S dS_{\beta} T_{\alpha}^{\beta} = \oint n_{\beta} dS T_{\alpha}^{\beta}$$

т.е.

$$\mathcal{F}_{\alpha} = \oint_S T_{\alpha}^{\beta} n_{\beta} dS = \oint_S dS \left\{ \frac{\varepsilon E_{\alpha} E_{\beta} n_{\beta}}{4\pi} - \frac{E^2}{8\pi} n_{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha} \left( \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \right\}$$

Окончательно

$$\vec{\mathcal{F}} = \oint_S dS \left( \frac{\varepsilon \vec{E} (\vec{E} \vec{n})}{4\pi} - \frac{E^2 \vec{n}}{8\pi} \left( \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \right).$$

*Проводники* В электростатике на границе  $E_\tau^I = E_\tau^{II} = 0$ , т.к. тока нет и  $E = E_n$ . Обычно стрикционный член после интегрирования вклада не дает:

$$T_\alpha^\beta = \frac{\varepsilon E_\alpha E^\beta}{4\pi} - \frac{E^2}{8\pi} \delta_\alpha^\beta \left( \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) = \frac{\varepsilon^2 E^2}{4\pi} \left( n_\alpha n^\beta - \frac{\delta_\alpha^\beta}{2} \right).$$

Сила

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha &= \int F_\alpha dV = \oint_S dS n_\beta \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} \left( n_\alpha n^\beta - \frac{\delta_\alpha^\beta}{2} \right) = \oint_S dS \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} \frac{1}{2} n_\alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{\mathcal{F}} = \oint_S dS \vec{n} \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \end{aligned}$$

На поверхности проводника

$$\varepsilon E = D_n^I = 4\pi \sigma_{нов}, D_n^I - [D_n^{II} = 0 \text{ вакуум}] = 4\pi \sigma_{нов}$$

тогда

$$\vec{f} = \vec{n} \frac{E 4\pi \sigma_{нов}}{8\pi} = \frac{E \sigma_{нов}}{2} \vec{n} = \frac{\sigma_{нов}}{2} \vec{E}$$

*Магнетики* Аналогично диэлектрикам объемная сила, действующая на магнетик, вычисляется по формуле

$$\vec{F} = -\frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu + \nabla \left( H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \right)$$

Тензор натяжений в этом случае:

$$T_\alpha^\beta = \frac{\mu H_\alpha H^\beta}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \delta_\alpha^\beta \left( \mu - \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \right)$$

Полная сила:

$$\mathcal{F}_\alpha = \int_V dV F_\alpha = \oint_S n_\beta T_\alpha^\beta dS$$

*Сверхпроводники* Пусть сверхпроводник помещен в  $\vec{H}$ -поле. Тогда внутри него поля  $\vec{B}$  нет (сверхпроводник его вытесняет), т. е. магнитные линии не проникают внутрь сверхпроводника, а огибают его по касательной. Поэтому также как было сделано для обычного проводника в  $\vec{E}$ -поле, в данном случае имеем: При малой стрикции  $\frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \approx 0$

$$T_\alpha^\beta = \mu \frac{H_\alpha H^\beta}{4\pi} - \mu \frac{H^2}{8\pi} \delta_\alpha^\beta$$



Огибание полем проводника  $(\vec{n} \vec{H}) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha &= \int_V F_\alpha dV = \oint_S n_\beta \left( \frac{\mu H_\alpha H_\beta}{4\pi} - \mu \frac{H^2}{8\pi} \delta_\alpha^\beta \right) = \\ &= \oint_S dS \left( \frac{\mu H_\alpha \overbrace{(H_\beta n_\beta)}^{(\vec{H}\vec{n})=0}}{4\pi} - \mu \frac{H^2}{8\pi} n_\alpha \right) \end{aligned}$$

поверхностная сила

$$f_\alpha = -\frac{\mu H^2}{8\pi} n_\alpha$$

и полная сила

$$\mathcal{F}_\alpha = \oint_S dS f_\alpha$$

т.е.

$$\vec{\mathcal{F}} = \oint_S ds \vec{f}$$

где

$$\vec{f} = -\frac{\mu H^2}{8\pi} \vec{n},$$

$\vec{n}$  - нормаль из сверхпроводника.

## Электродинамика-8. Квазистационарное приближение.

### Скин-эффект.

Поля  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$  вообще говоря, зависят от времени, т.е. имеют некоторое характерное время изменения  $T$ .

Этой зависимостью можно пренебречь при определенных ограничениях (квазистационарное приближение):

- Характерный размер области, в которой рассматривается процесс, значительно меньше длины волны поля:  $l \ll \frac{\tilde{c}}{\omega}$ ,  $\tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ . В этом случае во всех точках области поле будет иметь одинаковую фазу:

$$l \ll \frac{\tilde{c}}{\omega} \Leftrightarrow \frac{l}{\tilde{c}} \ll T$$

время запаздывания поля мало по сравнению с периодом.

- Частота ( $\omega = 2\pi/T$ ) изменения поля достаточно мала, так что можно пренебречь зависимостью характеристик среды от частоты:

$$\epsilon = \epsilon(\omega = 0),$$

$$\mu = \mu(\omega = 0),$$

$$\sigma = \sigma(\omega = 0).$$

Это выполняется, если время свободного пробега электрона в среде  $\ll T$ .

- Ток проводимости существенно превосходит ток смещения:

$$\begin{aligned} |\vec{j}_{\text{пров}}| &= |\vec{j}| = \left| \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \right| \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll \left| \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \right| \\ |\vec{j}_{\text{смещ}}| &= \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \end{aligned}$$

Оценим:

$$D \sim \epsilon E, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \sim \omega \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \omega \epsilon E \ll \sigma E \Rightarrow \omega \ll \sigma E, \text{ т.е. } T \gg \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Таким образом, уравнения Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho; \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}\end{aligned}$$

Так как  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$  (из закона сохранения заряда)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{grad} \overbrace{\operatorname{div} \vec{H}}^{\operatorname{div} \vec{H}=0} - \Delta \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{j} &= \operatorname{rot} \sigma \vec{E} = \sigma \operatorname{rot} \vec{E} = \sigma \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\sigma \mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

Таким образом

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{уравнение для } \vec{H} \text{ в квазистационарном приближении}$$

Взяв с обеих сторон  $\operatorname{rot}$ , получим

$$\Delta \vec{j} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Поделив на  $\sigma$

$$\Delta \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Это уравнения для поля в квазистационарном приближении. Причем, для решения задач достаточно вычислить только одну из величин  $\operatorname{vec} H$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$ .

*Скин-эффект* Рассмотрим пространство, разделённое плоскостью  $y = 0$  на проводник  $\sigma \neq 0$  и вакуум  $\sigma = 0$ .

Пусть из вакуума падает волна  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{H}_0 = H \vec{e}_x$ . Граничные условия:  $B_n^I = B_n^{II}$ ,  $H_\tau^I = H_\tau^{II}$  (поверхностных токов нет). Ищем решение в среде II в виде

$$\vec{H} = \vec{e}_x H(y) e^{-i\omega t},$$

так как  $\vec{H}^{II}$  подчиняется уравнению поля в квазистационарном приближении, то

$$\frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}(-i\omega) \frac{\partial H(y)}{\partial t},$$

гр. условия:  $H(y=0) = H_0$ . Будем искать решение в виде:  $H = A \exp(\alpha y)$ . После подстановки в уравнение, оказывается, что

$$\alpha = \pm \frac{1}{\delta}(1 - i), \text{ где } \delta = \frac{c^2}{2\pi\sigma\mu\omega},$$

тогда

$$H(y) = C_1 \exp\left(\frac{1-i}{\delta}y\right) + C_2 \exp\left(\frac{i-1}{\delta}y\right).$$

Если предположить, что в среде есть поглощение, то  $C_1 = 0$ , тогда, учитывая гр. условия:

$$\vec{H} = \vec{e}_x H_0 e^{-\frac{y}{\delta}} e^{-i(\omega t - \frac{y}{\delta})}$$

волна заметна только в граничном слое толщиной  $\delta$ .

# Электродинамика-9. Основы СТО. Преобразования Лоренца.

Пусть есть две системы координат, которые были совмещены в начальный момент времени:  $t = t' = 0$ ,  $x = x'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ . В момент времени  $t = 0$  отправляем систему  $K'$  в путешествие вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ , одновременно, из общего начала координат выпускаем сферическую волну. В системе  $K$  («неподвижная») мы увидим сферическую волну, поверхность постоянной фазы которой удовлетворяет уравнению  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ . В движущейся с.к. видна *та же* сферическая волна, и ее поверхность постоянной фазы определяется уравнением  $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = 0$ . Найдем линейное преобразование координат-времени, которое будет сохранять величину  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ ;

- так как  $K'$  движется вдоль оси  $x$ , то вдоль других осей изменений не происходит:  $y = y'$ ,  $z = z'$ ;
- координата плоскости  $x' = 0$  в системе  $K$  равна  $x = Vt$ , тогда можно искать преобразование в самом общем виде:  $x' = \alpha(V)(x - Vt)$ ;
- линейное преобразование времени:  $t' = \beta(V)t + \gamma(V)x$ .

В результате, после подстановки возникает тождество:  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x^2(\alpha^2 - c^2\gamma^2) - 2\alpha^2xVt - 2c^2\beta t\gamma x + y^2 + z^2 + t^2(-c^2\beta^2 + \alpha^2V^2)$ . Так как это тождество (при всех  $x$  и  $t$ ), то

$$\begin{cases} (\alpha^2 - c^2\gamma^2) = 1; \\ \alpha^2V + c^2\beta\gamma = 0; \\ c^2\beta^2 - \alpha^2V^2 = c^2. \end{cases}$$

Отсюда,  $\gamma = (1 - \beta^2)/(\beta V)$ ;  $\beta^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ,  $\gamma = -\frac{V}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ ,  $\alpha = \beta$ .

Итак, преобразования Лоренца:  $x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ,  $t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ .

*Преобразование длины:* в системе  $K'$  покоится линейка длины  $l_0$ , тогда  $l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt_2 - (x_1 - Vt_1)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ; При одновременном измерении в  $K$ ,  $t_1 = t_2$ , тогда  $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$  - линейка укорачивается.

*Запаздывание времени:* Пусть в системе  $K'$  в одной и той же точке  $\{x', 0, 0\}$  произошли последовательно два события в моменты времени  $t'_1$  и

$t'_2$ . Собственное время  $\tau_0 = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{Vx_2}{c^2} - (t_1 - \frac{Vx_1}{c^2})}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ , при этом  $x'_2 - x'_1 =$

$\frac{x_2 - Vt_2 - (x_1 - Vt_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = 0$ ; тогда  $\tau = t_2 - t_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ , т.е. время растягивается.

*Преобразование скоростей:* Пусть частица движется со скоростью  $\vec{v} = \{v_x; v_y; v_z\}$ , а скорость системы  $K' \vec{V} = \{V; 0; 0\}$ . Преобразования Лоренца

в дифференциальной форме:  $dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ ,  $dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ , тогда, так как

$$v'_i = dx'_i/dt', \text{ то } v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}.$$

*Преобразования Лоренца для зарядов, токов и полей.*  $\rho' = \frac{\rho - \frac{V}{c^2}j_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ ,

$$j'_x = \frac{j_x - \rho V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, j'_y = j_y, j'_z = j_z.$$

$$\varphi' = \frac{\varphi - \frac{V}{c}A_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, A'_x = \frac{A_x - \varphi \frac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, A'_y = A_y, A'_z = A_z.$$

4-вектор тока  $j^i = (c\rho, \vec{j})$ , 4-вектор потенциала  $A^i = (\varphi, \vec{A})$ .

Преобразование полей:  $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$ ,  $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{e}{c}[\vec{V}\vec{H}_{\perp}]}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ ,  $\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}$ ,  $\vec{H}'_{\perp} =$

$\frac{\vec{H}_{\perp} - \frac{e}{c}[\vec{V}\vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ , где  $V$  - скорость движения системы  $K'$ . При таких преобразованиях уравнения Максвелла остаются неизменными.

# Электродинамика-10. Эффект Вавилова-Черенкова. Циклотронное и синхротронное излучение. Рассеяние электромагнитных волн на свободных электронах. Лазеры на свободных электронах.

Эффект Черенкова: заряженная частица, движущаяся в прозрачной среде, в определенных условиях испускает излучение, отличное от тормозного. Тормозное излучение - излучение, испускаемое самим электроном, движущимся ускоренно; а излучение Вавилова-Черенкова - излучение среды, при движении в ней заряженной частицы с постоянной скоростью  $v$ .

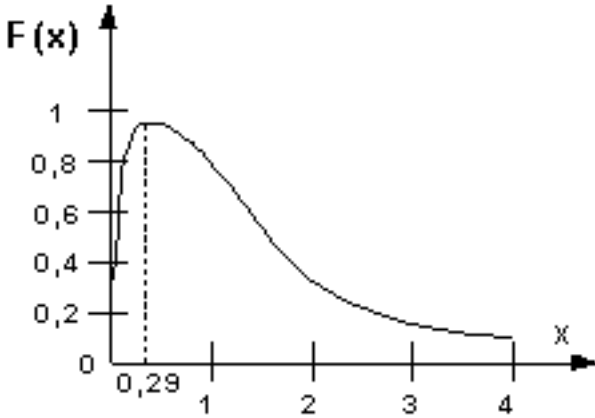
Связь частоты фурье-компоненты поля частицы с проекцией волнового вектора излучения на ось движения частицы:  $\omega = k_x v$ , где  $k = n\omega/c$ . Значит, условие излучения:  $k > k_x \Leftrightarrow v > c/n$ .

Пусть излучение происходит под углом  $\theta$  к линии движения частицы, тогда  $k_x = k \cos \theta = (n\omega/c) \cos \theta = \omega/v \Rightarrow \cos \theta = c/nv$ , т.е. излучение одной частоты происходит по поверхности конуса с углом  $\theta$  при вершине. Потеря энергии при этом излучении  $dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \omega d\omega$ . Эта энергия излучается в диапазоне углов  $d\theta = \frac{c}{vn^2 \sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \omega} d\omega$ .

*Циклотронное и синхротронное излучение.* Синхротронное (магнитотормозное) излучение - это излучение электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися с релятивистскими скоростями в однородном магнитном поле. Синхротронное излучение обусловлено ускорением, связанным с искривлением траекторий частиц в магнитном поле. Аналогичное излучение нерелятивистских частиц, движущихся по круговым или спиральным траекториям, называется циклотронным излучением; оно происходит на основной гиромагнитной частоте и ее первых гармониках. С увеличением скорости частицы роль высоких гармоник возрастает; при приближении к релятивистскому пределу излучение в области наиболее интенсивных высоких гармоник обладает практически непрерывным спектром и сосредоточено в направлении мгновенной скорости в узком конусе.

Рассмотрим движение заряда  $e$  в постоянном однородном магнитном поле  $\vec{H}$ . Радиус орбиты и циклическая частота движения частицы:  $r = \frac{m c v}{e H \sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $\omega_H = \frac{e H \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m c}$ . Полная интенсивность излучения по всем направлениям  $I = \frac{2e^2 H^2 v^2}{3m^2 c^5 (1 - v^2/c^2)}$  (определяется как излучение заряда, движущегося с ускорением). Спектральное распределение излучения

сосредоточенно в районе частот  $\omega = \omega_H \left( \frac{\xi}{mc^2} \right)^3$ , где  $\xi$  - энергия частицы, и имеет в нем квазинепрерывный спектр. Поэтому, можно выразить  $dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$ , где  $\omega_c = \frac{3eH}{2mc} \left( \frac{\xi}{mc^2} \right)^2$ ,  $F(x)$  - специальная функция. По сути,  $F(x)$  - обезразмеренное спектральное распределение.



Излучение отдельной частицы в общем случае эллиптически поляризовано с большой осью эллипса поляризации, расположенной перпендикулярно видимой проекции магнитного поля. Степень эллиптичности и направление вращения вектора напряженности электрического поля зависят от направления наблюдения по отношению к конусу, описываемому вектором скорости частицы вокруг направления магнитного поля. Для направлений наблюдения, лежащих на этом конусе, поляризация линейная.

#### *Рассеяние электромагнитных волн на свободных электронах.*

Рассеяние э-м волны: если на систему падает э-м волна, то под ее влиянием заряды системы приходят в движение, что сопровождается излучением э-м волн во все стороны. Эффективное сечение рассеяния  $d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{\langle S \rangle} d\Omega$ , где  $\langle dI \rangle$  - средняя энергия, излучаемая в телесный угол  $d\Omega$  при падении на систему волны с вектором Пойнтинга  $S$ .

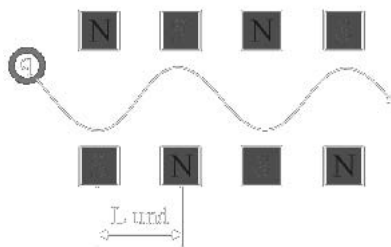
Пусть на неподвижный заряд падает волна  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$ . Будем считать, что  $|e\vec{E}| \gg \left| \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}] \right|$ .

Заряд находится в  $r = 0 \Rightarrow \vec{d} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$ , где  $\vec{d} = e\vec{r}$ . Интенсивность дипольного излучения  $dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{d}}\vec{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\vec{E}\vec{n}]^2 d\Omega$ , где  $\vec{n}'$  - ед.вектор в направлении рассеяния. Вектор Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}$ . Отсюда,  $d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega \Rightarrow \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$  - формула Томсона. Для неполяризован-



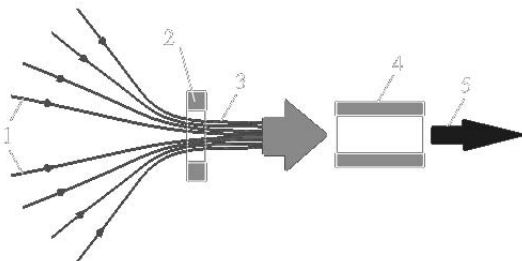
ной волны  $d\sigma = 0.5 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta)d\Omega$ .

Лазер на свободных электронах - лазер, в котором колеблющиеся электроны перемещаются с релятивистской скоростью в направлении распространения волны. Его принцип основан на том, что движущаяся заряженная частица приводится в колебательное движение поперек направления своего движения. При этом возникает излучение в малом телесном угле вперед по направлению движения частицы. Это излучение зависит от продольной скорости, и шага ондулятора. Оно может быть когерентным, что и дало название «лазер». Для того чтобы частица имела поперечные колебания, применяется система называемая ондулятором. По принципу воздействия на частицу ондуляторы делятся на электростатические и магнитные. Здесь рассматривается магнитная система: (1).



1.

2.



Устройство лазера(2): 1. Первичные пучки частиц. 2. Рассеивающая магнитная линза. 3. Суммарный пучок. 4. Ондулятор. 5. Выходное излучение.

Источником частиц могут быть электронные и ионные пушки, радиоактивные источники высокой интенсивности (Co, Sr ...), космические лучи и солнечный ветер.

# Электродинамика-11. Интерференция света. Временная и пространственная когерентность. Интерферометры.

Интерференция - явление наложения двух когерентных световых волн, при котором происходит перераспределение светового потока, в результате чего появляются точки с максимумом и минимумом интенсивности света.

Когерентность - согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Волны называются когерентными, если разность их фаз остается постоянной во времени.

Волны называются когерентными, если разность их фаз остаётся постоянной во времени.

Этому условию удовлетворяют монохроматические волны - неограниченные в пространстве волны, имеющие одной определённой и строго постоянной частоты. Ни один источник не даёт строго монохроматический свет. Свет немонохроматического источника можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга цугов. Продолжительность одного цуга называется « $\tau$  когерентности». Чем меньше  $\Delta\omega$  - ширина спектра источника, тем больше  $\tau_{\text{ког}}$ , тем ближе свет к монохроматическому. Длина когерентности  $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$ .

Пусть в среде есть две монохроматические волны одинаковой частоты, тогда в точке  $\vec{r}$  они возбуждают колебания:  $x_1 = A_1 \cos(\omega t - (\vec{r} - \vec{r}_{10}) \vec{k}) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $x_2 = A_2 \cos(\omega t - (\vec{r} - \vec{r}_{20}) \vec{k}) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , где  $x$  - либо  $E$ , либо  $H$ . В силу принципа суперпозиции амплитуды колебаний будут складываться. Тогда, амплитуда результирующего колебания будет:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Так как интенсивность  $I \sim A^2$ , то

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В тех точках, где разность  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ , интенсивность колебаний будет максимальной  $I_{\text{max}} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ , в точках, где  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$  - минимальной:  $I_{\text{min}} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ , причем так разность фаз зависит только от  $\vec{r}$ , то и картина распределения максимумов и минимумов будет зависеть только от  $\vec{r}$ .

Одним из способов получения когерентных волн является разделение излучения, идущего от одного источника, на части, которые проходят разные оптические пути ( $S$ ) и затем снова складываются. В этом случае, как легко заметить, разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1 = k(S_1 - S_2) = k\Delta$ , где  $\Delta$  - оптическая разность хода.

Если  $k\Delta = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то интенсивность достигает максимума,  $\Delta_{max} = 2\pi m/k = m\lambda$ .

Если  $k\Delta = 2\pi m + 1$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то интенсивность достигает минимума,  $\Delta_{min} = (2\pi m + 1)/k = \lambda/2 + m\lambda$ .

*Пространственная когерентность.* Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференционную картину, называются пространственно когерентными.

Фазовый сдвиг интерференционной картины от А относительно инт. картины от В:  $\Delta = l(\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$ . Условие хорошей контрастности интерференционной картины:  $\Delta < \lambda/2$  (для двух щелей, расстояние между которыми  $l$ , условие контрастности будет  $\Delta < \lambda$ )

*Временная когерентность.* Рассмотрим 2 некогерентных источника  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$ . Считается, что интерференционную картину еще можно различить, если  $m$ -й максимум первого источника совпадает с  $(m - 1)$ -м максимумом второго. Т.е.  $m\lambda = (m - 1)(\lambda + \delta\lambda) \Rightarrow \lambda = (m - 1)\delta\lambda$ . Тогда максимальный порядок интерференции  $m_{max} = \lambda/\delta\lambda$ .

Если свет состоит из цугов волн продолжительности  $\tau_{ког}$ , то для интерференции появляется дополнительное ограничение:  $\Delta < l_{ког}$ . Тогда порядок интерференции  $m_{max} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\Delta}{l_{ког}}$ , значит, чем больше  $\tau_{ког}$ , тем выше порядок интерференции.

*Интерферометры* - оптические измерительные приборы, действие которых основано на интерференции света.

*Интерферометр Хамена.* На пути одного луча можно ввести образец с показателем преломления  $n$ , это создаст оптическую разность хода лучей, которую можно будет измерить по получающейся интерференционной картине. Таким образом можно измерить  $n$ .

*Интерферометр Майкельсона-Морли.* При изменении положения зеркала (вертикального), изменяется интерференционная картина, что дает возможность измерить, насколько сместилось зеркало.

*Интерферометр Фабри-Перо.* По смещению интерференционной картины можно судить об изменении расстояния между пластинами.

# Электродинамика-12. Дифракция света. Приближения Френеля и Фраунгофера. Спектральные приборы.

*Дифракция* - отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики.

*Принцип Гюйгенса*: каждая точка фронта волны является источником вторичных волн, огибающая вторичных волн есть фронт волны в следующий момент времени.

*Принцип Гюйгенса-Френеля*: световая волна, возбуждаемая каким-либо источником, может быть представлена как суперпозиция когерентных вторичных волн, «излучаемых» вторичными источниками. Основываясь на принципе Гюйгенса-Френеля, можно доказать, что поле, создаваемое поверхностью  $\Sigma$ , каждая точка  $M$  которой является источником вторичных волн, в некоторой точке  $P$  равно:

$$E(P) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} E(M) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma, \quad (\rho = PM) - \text{интеграл Френеля.}$$

*Метод зон Френеля*. Зона Френеля - такая область фронта волны, что разность хода (до точки наблюдения) между любыми двумя точками зоны не превышает  $\lambda/2$ .

Площади зон Френеля равны:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_m = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda$ .

Если вклад  $i$ -й зоны в амплитуду волны в точке  $P$  равен  $A_i$ , то суммарная амплитуда  $A_P = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$  - эффекты соседних зон компенсируются, так как разность фаз между ними равна  $\lambda/2$ .

*Дифракция Фраунгофера на периодических структурах*. Рассмотрим щель ширины  $b$ . Разность хода  $\Delta x = x \sin \varphi$ , тогда  $E_{\varphi} = \int_0^b E_0 e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx$ ,

после интегрирования  $E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin(0,5 \cdot kb \sin \varphi)}{0,5 \cdot kb \sin \varphi} \frac{b}{2} e^{i(\omega t - 0,5 kb \sin \varphi)}$ , тогда интенсивность  $I_{\varphi} \propto A_{\varphi}^2 = I_0 \sin^2 \frac{kb \sin \varphi}{2}$ .

Рассмотрим дифракционную решетку. Разность фаз от двух соседних щелей  $\Delta \varphi = k(d \sin \varphi)$ . Суммарная амплитуда

$$\begin{aligned} A &= \sum_i A_i = A_0 \frac{\sin(0,5 \cdot kb \sin \varphi)}{0,5 \cdot kb \sin \varphi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi} = \\ &= A_0 \frac{\sin(0,5 \cdot kb \sin \varphi)}{0,5 \cdot kb \sin \varphi} \frac{e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}} \sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \end{aligned}$$

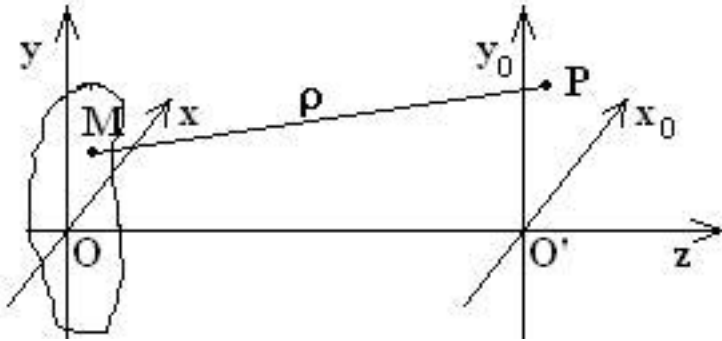
$$I_{\varphi} \propto A_{\varphi} A_{\varphi}^* = I_0 \left( \frac{\sin \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\frac{kb \sin \varphi}{2}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{N \Delta \varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}} \right)^2 =$$

$$= I_0 * (\text{дифракционный член}) * (\text{интерференционный член})$$

*Приближения Френеля и Фраунгофера.* Явление дифракции классифицируют по расстоянию от источника до точки наблюдения.

Разность хода между лучами 1 и 2:  $\Delta = P_0A + AP - a - b = \dots = \frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ , тогда радиус  $m$ -й зоны определяется из того, что  $\Delta_m = \frac{m\lambda}{2}$ , значит,  $R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$ . При  $a \rightarrow \infty$   $m \rightarrow \frac{R_m^2}{\lambda b}$ , если при этом  $b \rightarrow \infty$ , то  $m \rightarrow 0$ ; при  $b = \frac{R_m^2}{\lambda}$ ,  $m = 1$ .

Расстояние, при котором в отверстие в экране помещается ровно одна зона Френеля,  $b_d = \frac{R^2}{\lambda}$ , называется дифракционной длиной светового пучка. Ближняя зона дифракции:  $b \ll b_d$  - в отверстие попадает очень много зон Френеля, свет ведет себя по законам геом. оптики. Дальняя зона:  $b \gg b_d$  - в отверстие попадает только часть нулевой зоны Френеля, на больших расстояниях пучок может сильно расходиться.



*Приближение Френеля* - приближение слаборасходящихся (параксиальных) пучков:  $z = OO' \gg x, y, x_0, y_0$ , тогда  $MP = \sqrt{z^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} \cong z + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z}$ , и интеграл Френеля:

$$E(x_0, y_0, z) =$$

$$= \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx dy.$$

Приближение Фраунгофера - дифракция в дальней зоне, т.е.  $z \gg x, y, z \sim x_0, y_0$ , тогда  $MP \cong d + \frac{x^2+y^2}{2d} - \frac{xx_0+yy_0}{2d}$ , ( $d = PO$ ) и интеграл Френеля:

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda d} e^{-ikd} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) \exp \left\{ \frac{ik}{2d} [xx_0^2 + yy_0^2 - x^2 - y^2] \right\} dx dy.$$

Распространение световых волн в пространстве описывается уравнением  $\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ . Для монохроматической волны  $\Phi = \Phi(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ . // То же самое, но мудренее: Если известны значения  $\Phi$  и  $\text{div } \Phi$  на поверхности, ограничивающей некоторый объем, то можно вычислить внутри этого объема по формуле Гельмгольца-Кирхгофа:

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{d}{d\vec{n}} \left( \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \right) \cdot \Phi - \frac{d\Phi}{d\vec{n}} \cdot \left( \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \right) \right\} ds$$

Применительно к дифракции на отверстии:

$$\Phi(P) = \iint_{\Sigma_0} \left\{ \frac{A_0 \exp(-ik\rho_1)}{\rho_1} e^{-ik\rho} \frac{\cos(\vec{n} \vec{\rho}_1) - \cos(\vec{n} \vec{\rho})}{2\lambda} \right\} d\sigma,$$

$$\frac{A_0 \exp(-ik\rho_1)}{\rho_1} = \Psi'(x', y').$$

//

*Спектральный прибор* - аппарат, предназначенный для исследования спектрального состава света. (например, диф.решетка). Разрешающая способность прибора  $R = \frac{\delta\lambda}{\lambda}$ .

# Электродинамика-13. Излучение света атомами и молекулами. Ширина линии излучения. Спонтанные и вынужденные переходы. Лазеры.

Простейшей моделью излучателя является электрон, колеблющийся около положения равновесия по гармоническому закону  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , решение  $x(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . При ускоренном движении электрон теряет энергию на излучение (Планк):  $\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} E$ , где  $E$  - полная энергия слабо затухающего осциллятора. Тогда, полная энергия осциллятора изменяется по закону:  $E(t) = e^{-\gamma t}$ , где  $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$  (СГС) (в СИ  $\gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$ ). Так как амплитуда колебаний осциллятора (амплитуда излученной волны), связана с его энергией как  $E \sim A^2$ , то амплитуда излучения  $A = A_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ , тогда

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

По такому же закону меняется поле излучения.

Пусть, для простоты,  $E(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\omega_0 t)$ , оно может быть разложено в ряд Фурье:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \dots = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0) - i\alpha/2},$$

тогда

$$|a(\omega)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}.$$

Коэффициенты  $a(\omega)$  определяют относительные спектральные плотности излучения.

На частотах  $\omega_1 = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$  и  $\omega_2 = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$  интенсивность падает в 2 раза по сравнению с максимумом.  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma$  называется шириной линии излучения.

*Спонтанные и вынужденные переходы. Лазеры.*

Атомы могут находиться только в квантовых состояниях с дискретным набором уровней энергии  $E_1, E_2, \dots$ .

Рассмотрим атом, который может находиться только в двух энергетических состояниях. В состоянии равновесия, у них будут различные заселенности.

Под действием излучения может осуществляться вынужденный переход  $1 \rightarrow 2$ , приводящий к поглощению излучения. Этот процесс называется вынужденным поглощением и описывается соотношением

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 B_{12} U_\nu,$$

где  $U_\nu$  - спектральная объёмная плотность энергии  $[U_\nu] = \text{Джс}/\text{м}^3$ .

Возможен спонтанный переход  $2 \rightarrow 1$  с испусканием фотона. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A_{21}.$$

Под действием внешнего излучения также возможно т.н. вынужденное излучение (вынужденный переход  $2 \rightarrow 1$ ), описываемое уравнением

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} N_2 U_\nu.$$

При этом вторичный фотон неотличим от первичного.

В состоянии равновесия,  $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0$ , откуда  $U_{\nu T} = \frac{(A_{21}/B_{21})}{(B_{21}/B_{12})e^{h\nu/kT}-1}$ .  
Используя предельные случаи, таким образом можно получить формулу Планка т.е. показать, что  $(A_{21}/B_{21} = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3}, B_{21} = B_{12} = B$ .

При прохождении светом слоя вещества  $dz$ , изменение интенсивности равно  $dI = B(N_2 - N_1)dz = GI dz$  (в приближении прямогоугольного спектра шириной  $\Delta\omega$ ).

Тогда, если  $G > 0$ , то интенсивность света возрастает, т.е. происходит усиление света. Таким образом, для генерации света необходима система накачки (например, газоразрядная лампа), создающая  $G > 0$ , и обратная связь - резонатор, который заставит пучок многократно проходить через среду, что вызовет лавинообразное усиление.

Лазер - оптический квантовый генератор.

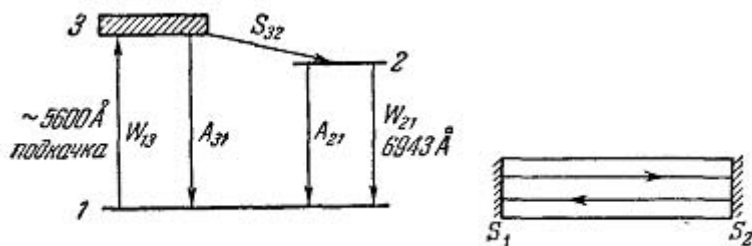
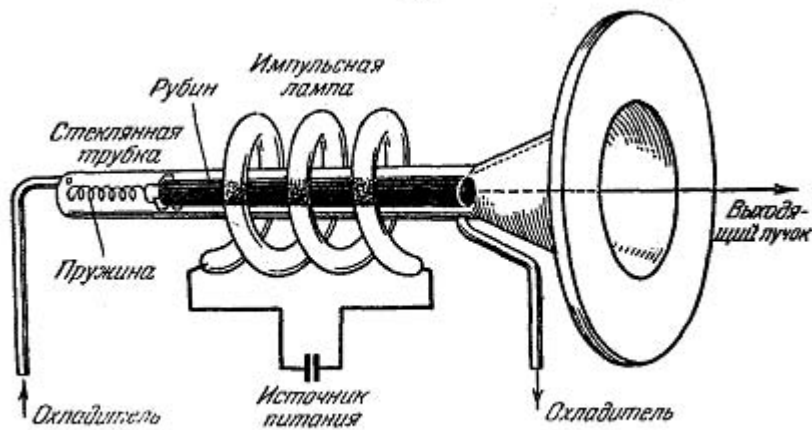
Состав:

1. активная среда, в которой создается инверсионная заселенность  $N_2 > N_1$ .
2. система накачки - устройство для создания инверсионной заселенности.



3. оптический резонатор (самый простой - два параллельных зеркала).

*Рубиновый лазер:* Вдоль оси резонатора происходит многократное отражение, что приводит к лавинообразному нарастанию излучения.



# Электродинамика-14. Дисперсия и поглощение света. Отражение и преломление на границе двух сред. Рассеяние света. Формула Рэля.

Дисперсия показателя преломления среды - его зависимость от частоты электромагнитных волн  $n = n(\omega)$ . Она возникает из-за вынужденных колебаний частиц среды (электронов и ионов) под действием поля волны. Пусть  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ , тогда движение электрона описывается уравнением  $\ddot{x} - \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE(t)}{m} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}$ , где  $\gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}$ . Для теории дисперсии имеет значение не общее, а только частное решение этого уравнения, представляющее вынужденные колебания осциллятора:  $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ , после подстановки в уравнение, получаем

$$x(t) = \frac{\frac{e}{m} E_0}{i\gamma\omega + \omega_0^2 - \omega^2} e^{-i\omega t}.$$

Атом в электрическом поле приобретает дипольный момент  $p = ex$ , тогда поляризация среды

$$P = pN = \frac{\frac{e^2}{m} N}{i\gamma\omega + \omega_0^2 - \omega^2} E_0 e^{-i\omega t} = \frac{\frac{e^2}{m} N}{i\gamma\omega + \omega_0^2 - \omega^2} E(t).$$

Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1 + 4\pi(P/E)$ , а показатель преломления среды  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , если считать  $\mu \sim 1$ , то  $n = \sqrt{\epsilon} = n' - in''$ . Тогда

$$n'^2 - n''^2 = 1 + \frac{4\pi \frac{e^2}{m} N (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2},$$

$$2n'n'' = \frac{4\pi \frac{e^2}{m} N \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

Из этих уравнений  $n' = 1 + 0.5 \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ ,  $\mu = \frac{2\omega n''}{c} = \frac{\omega_p^2 \omega^2 \gamma / c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ , где  $\omega_p^2 = 4\pi \frac{e^2}{m} N$ .

Влияние поглощения существенно только на частотах, близких к собственной частоте осциллятора, а в остальной области  $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \gamma\omega$ . Вблизи резонанса  $n' = 1 + \frac{\pi e^2 N}{m\omega_0^2} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + 0.25\gamma^2}$ ,  $\mu = \frac{\pi e^2 N}{mc} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + 0.25\gamma^2}$ . Поглощение в веществе описывается законом Бугера-Ламберта:  $I = I_0 e^{-\mu d}$ , где  $\mu = \frac{4\pi}{\lambda} n'n'' = \mu(\omega)$ , а  $d$  - толщина слоя.

Область, где  $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ , называется областью нормальной дисперсии, а область, где  $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ , называется областью аномальной дисперсии - это область поглощения.

Пусть на границу двух однородных изотропных диэлектриков ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) падает плоская электромагнитная волна ( $\vec{E}_1 = \vec{\xi}_1 \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})$ ). Граничные условия:  $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, E_{\tau_1} = E_{\tau_2} \Rightarrow \xi_{1t} \exp[i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})] + \xi_{0t} \exp[i(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r})] = \xi_{2t} \exp[i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})]$  - равенство выполняется для любых  $t$  и  $r$ , значит  $\xi_{1t} + \xi_{0t} = \xi_{2t}, \vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_0 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r}$ , т.е.  $k_{1n} = k_{0n} = k_{2n}, k_{1t} = k_{0t} = k_{2t}$ , учтем, что  $k_1 = k_0 = \frac{\omega}{c} n_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}, k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$ . Тогда,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \theta_1 = \theta_0$  - ф-ла Снелиуса.

Для расчета энергетических (=амплитудных) коэффициентов отражения и преломления, нужно рассмотреть 2 крайних случая (остальные - их комбинация): вектор  $\vec{H}$  лежит в плоскости хода луча и вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости хода луча.

- вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости хода луча.

Коэффициент отражения:

$$r_{\parallel} (= \frac{\xi_0}{\xi_1}) = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Коэффициент преломления:  $t_{\parallel} (= \frac{\xi_2}{\xi_1}) = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{2z}}$

- вектор  $\vec{H}$  лежит в плоскости хода луча. Коэффициент отражения,

$$r_{\perp} (= \frac{H_0}{H_1}) = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} k_{1z} - \frac{1}{\varepsilon_2} k_{2z}}{\frac{1}{\varepsilon_1} k_{1z} + \frac{1}{\varepsilon_2} k_{2z}} = \frac{tg(\theta_1 - \theta_2)}{tg(\theta_1 + \theta_2)}$$

Коэффициент преломления:

$$t_{\perp} (= \frac{H_2}{H_1}) = \frac{2 \frac{1}{\varepsilon_1} k_{1z}}{\frac{1}{\varepsilon_1} k_{1z} + \frac{1}{\varepsilon_2} k_{2z}}$$

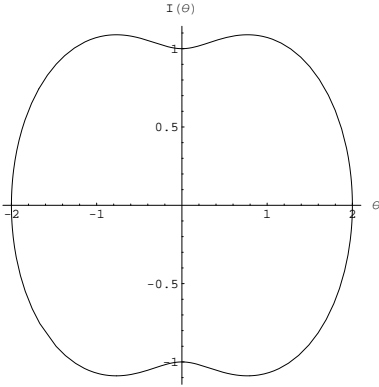
Если  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ , то  $tg(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \infty \Rightarrow r_{\parallel} = 0$ . Такой угол  $\varphi = \arctg(\frac{n_2}{n_1})$  называется углом Брюстера.

*Рассеяние света* - преобразование света веществом, сопровождающееся изменением направления распространения света. Среда, в которой  $n = \text{const}$ , называется оптически однородной. Иначе - оптически неоднородной (мутные среды). Рэлеевское рассеяние - рассеяние в мутных средах

с размером неоднородности  $(0,1-0,2 \lambda)$ . Формула Рэлея для зависимости интенсивности рассеянного света от угла рассеяния  $(\theta)$ :

$$I(\theta) = a \frac{N_0 V^2}{R^2 \lambda^4} (1 + \cos^2 \theta),$$

(рассеяние в объеме  $V$ , содержащем  $N$  частиц),  $R$  - расстояние до точки наблюдения.



При увеличении размера частиц необходимо пользоваться теорией Ми. Она слабо зависит от длины волны. (преимущественное рассеяние вперед с побочными резонансами)

## Взаимодействие света и вещества. Законы фотоэффекта. Закон Стефана-Больцмана.

Свет имеет двойственную природу: он обладает волновыми свойствами (интерференция, дифракция) и свойствами потока частиц - фотонов. Фотоны имеют нулевую массу покоя и движутся со скоростью света в вакууме, энергия фотона  $\xi = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ , а импульс фотона  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ . Фотоны возникают при переходе атомов из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией, при торможении или ускорении заряженных частиц и в ядерных реакциях.

*Фотоэффект* - прямое взаимодействие электромагнитной волны с веществом, в результате которого энергия фотонов передается электронам вещества.

*Внешний фотоэффект* - поглощение фотонов, сопровождающееся вылетом электронов за пределы тела.

*Внутренний фотоэффект* - электроны, оставаясь в теле, изменяют свое энергетическое состояние.

Если между облучаемым телом [катод] и анодом создается разность потенциалов  $\varphi$ , ускоряющая электроны, то при внешнем фотоэффекте возникает фототок  $J$ . При некотором  $\varphi$  фототок достигает насыщения  $I = I_n$ . Для прекращения фототока необходимо создать задерживающее напряжение  $\varphi_1 = -(W_{max}/e)$

*Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:*  $h\nu = A_{вых} + W_{max}$ .

*Законы внешнего фотоэффекта:*

1. при фиксированной длине волны падающего света, число фотоэлектронов пропорционально интенсивности света;
2. максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой падающего света и не зависит от его интенсивности;
3. для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта - минимальная частота падающего света, при которой возможен фотоэффект.

*Тепловое излучение* - электромагнитное излучение тела в состоянии термодинамического равновесия (излучение - из-за теплового движения

частиц). Спектральная плотность излучения  $E_{\nu,T} = \frac{dW}{d\nu}$ . Закон Стефана-Больцмана:  $E_T = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\nu,T} d\nu = \sigma T^4$  для абс. чёрного тела.

*Формула Планка:*  $E_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$ ,  $E_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1}$ .

*Закон смещения Вина:*  $T\lambda_{max} = b$ .

# Электродинамика-16. Нелинейные оптические явления. Генерация гармоник,самофокусировка света.

Удерживающая электроны около положения равновесия сила не всегда подчиняется закону Гука  $f(x) = -m\omega_0^2x$ . В общем виде, эта сила, равна  $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2f''(0)/2 + \dots$ . Рассмотрим среду с квадратичной нелинейностью, уравнение движения заряженной частицы этой среды под действием поля  $E(t)$ , будет иметь вид:  $eE + f(0) + xf'(0) + x^2f''(0)/2$ . Если  $x = 0$  - положение равновесия, то  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) < 0$ , тогда можно ввести  $\omega_0^2 = -\frac{f'(0)}{m}$ , и  $\xi = f''(0)$ . Тогда уравнение движения принимает вид:  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{e}{m}E + \xi x^2$ , Величина  $\xi x^2$  предполагается малой, поэтому  $x = x_0 + x_1 + x_2$ , где  $x_1 \sim \xi$ ,  $x_2 \sim \xi^2$ . Тогда

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2x_0 = \frac{e}{m}E \\ \ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 = \xi x_0^2 \end{cases}$$

Поляризация среды  $P = Np = Nex = Nex_0 + Nex_1 = P_{лин} + P_{нелин}$ ,

$$\begin{cases} Nex_0 = P_{лин} = \chi_1 E \\ Nex_1 = P_{нелин} = \chi_2 E \end{cases}$$

где

$$\chi_1 = \frac{\frac{e^2}{m}N}{i\gamma m + (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

и

$$\chi_2 = \frac{\frac{e^3}{m^2}N}{[i\gamma m + (\omega_0^2 - \omega^2)]^3}$$

*Генерация гармоник.* Напряженность электрического поля волны создает в среде поляризованность, которая распространяется в виде волны. Изменяющаяся поляризованность создает вторичную электромагнитную волну и т.д. Появляются волны новых частот (как комбинация старых) - идет генерация гармоник.

Пусть в среде распространяются 2 волны  $E_1 = E_{10} \cos(\omega_1 t - k_1 z)$  и  $E_2 = E_{20} \cos(\omega_2 t - k_2 z)$ . Ими порождается волна квадратичной поляризованности  $P_{нелин} \sim E^2 = (E_1 + E_2)^2 = 0.5(E_{10}^2(1 + \cos 2(\omega_1 t - k_1 z)) + E_{20}^2(1 + \cos 2(\omega_2 t - k_2 z)) + 2E_{10}E_{20}\frac{1}{2}(\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z))$ . Следовательно, возникает четыре волны поляризованности:  $P = P_0 + P_{2\omega_1} + P_{2\omega_2} + P_{\omega_1 + \omega_2} + P_{\omega_1 - \omega_2}$ .

*Самофокусировка.* Рассмотрим среды с кубической нелинейностью.  $\vec{P} = \varkappa \vec{E} + a_3 E^2 \vec{E}$  (при этом, если сохраняется симметрия, исчезают все члены с четной степенью  $E$ ),  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$ . Тогда  $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\vec{E} + 4\pi(\varkappa + a_3 E^2)\vec{E}}{\vec{E}}} = \sqrt{1 + 4\pi(\varkappa + a_3 E^2)}$ ,  $n \approx n_0 + n^2 E^2$ . Плотность потока энергии различается по сечению пучка: скорость периферийных участков  $v = c/n = \frac{c}{n_0 + n_2 E^2}$  в случае, когда  $n_2 > 0$ , меньше, чем скорость центральных  $\Rightarrow$  фронт становится вогнутым - явление самофокусировки.



# Атомка-1. Экспериментальные факты, лежащие в основе квантовой теории. Волновые и корпускулярные свойства материи.

1900. Планк. Исследование равновесного э/м излучения. Излучение и поглощение света веществом происходит порциями - квантами.  $E = \hbar\omega$  - энергия кванта излучения,  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$  - постоянная Планка.  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ,  $p = E/c$ ,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $I(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}$

1905. Эйнштейн. При распространении в пространстве свет ведет себя подобно совокупности частиц, чья энергия определяется формулой Планка. Частицы - фотоны - обладают также и волновыми свойствами (интерференция, дифракция). Фотоэффект.  $W_{\max} = \hbar\omega - A$ ,  $W_{\max}$  - максимальная энергия вылетающих электронов,  $A$  - работа выхода.  $W_{\max} = 0 \Rightarrow \hbar\omega_0 = A$  - красная граница фотоэффекта.

1922. Комптон. Рассеяние фотонов на свободных электронах.  $\lambda' - \lambda = \lambda_K(1 - \cos\vartheta)$ , где  $\lambda'$  и  $\lambda$  - длины волн рассеянного и падающего излучения,  $\vartheta$  - угол рассеяния,  $\lambda_K$  - комптоновская длина.

1885. Серии Бальмера.  $1/\lambda_{mn} = Z^2 R \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$  - обобщённая формула Бальмера ( $n > m$ ).  $R = 109737.32 \text{ см}^{-1}$  - постоянная Ридберга.

- $n = 1$  - серия Лаймана
- $n = 2$  - серия Бальмера
- $n = 3$  - серия Пашена
- $n = 4$  - серия Брэкета
- $n = 5$  - серия Пфунда
- $n = 6$  - серия Хэмфри
- $n = 7$  - серия Хансена-Стронга

1913. Атом Бора.  $r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2 Z}$ ,  $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0.5 \text{ \AA}$  - первый Боровский радиус.  $v_n = \frac{e^2 Z}{\hbar n}$ ,  $E_n = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$ .  $\omega_{mn} + \omega_{np} = \omega_{mp}$  - композиционный закон Ритца.

1922. Опыты Штерна и Герлаха.  $F_z = \mu_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \sim S_z$ , где  $\mu_z = 2\mu_0 S_z$  - магнитный момент. Проекция момента на направление магнитного поля квантуется.

1927. Дифракция электронов на кристаллах.  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$  - длина волны де Бройля.

## Атомка-2. Атом водорода по Бору.

В основе модели Бора лежит Резерфордская планетарная модель атома, квантовый постулат Планка о том, что осциллятор, имеющий собственную частоту колебаний  $\omega$ , может получать или отдавать энергию только дискретными порциями  $\hbar\omega$ , и предложенный самим Бором принцип соответствия, согласно которому движения электрона по орбите большого радиуса, когда электрон почти уже оторван от ядра, должно подчиняться законам классической физики.

1. В рамках классической механики решаем задачу о движении электрона в кулоновском поле ядра

2. Применим условия квантования Бора-Зоммерфельда

$$\frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = n_r \hbar, \quad \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi \hbar$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_r &= m\dot{r} \\ p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi} \end{aligned} \right\} - \text{обобщённые импульсы}$$

$n_r$  - радиальное квантовое число,  $n_\varphi$  - азимутальное квантовое число.

Для упрощения решим сначала задачу о круговых орбитах, а потом обобщим результат.

$$\oint pdq = nh \Rightarrow 2\pi r m v = nh \rightarrow v = \frac{n\hbar}{mv} \quad (*)$$

Из 2го з-на Ньютона

$$mv^2/r = ze^2/r^2 \quad (**).$$

Из (\*) подставляем значение  $v$  в (\*\*) и выражаем  $r$ :

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2 Z}, \quad r_0 \approx 0.5\text{\AA} - \text{I боровский радиус}$$

В (\*) подставляем значение  $r_n$  и получаем

$$v_n = \frac{e^2 Z}{\hbar n} \quad (***)$$

Полная энергия системы

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}$$

Из (\*\*\*) имеем, что  $\frac{Ze^2}{r} = mv^2 \Rightarrow E = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2}$ . Из (\*\*\*) подстав-  
 ляем значение  $v_n$

$$E_n = -\frac{me^2 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$$

Обобщение на 2D случай

$$E_n = -\frac{me^2 Z^2}{2\hbar^2 (n_r + n_\varphi)^2}$$

Обобщение на 3D случай

$$E_n = -\frac{me^2 Z^2}{2\hbar^2 (n_r + n_\theta + n_\Psi)^2},$$

где  $n_\theta$  - экваториальное квантовое число,  $n_\Psi$  - широтное квантовое число.

$$\left. \begin{aligned} p_r &= m\dot{r} & \oint p_r dr &= 2\pi n_r \hbar \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} & \oint p_\theta d\theta &= 2\pi n_\theta \hbar \\ p_\varphi &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\Psi} & \oint p_\Psi d\Psi &= 2\pi n_\Psi \hbar \end{aligned} \right\}$$

— условия квантования Б.-З. в 3D случае

# Атомка-3. Основные постулаты квантовой механики. Чистые и смешанные состояния квантовомеханической системы. Волновая функция, матрица плотности.

*Постулаты:*

1. Каждой физической величине сопоставляется линейный эрмитов оператор  $\hat{L}$ :  $\hat{L} = \hat{L}^+ \Leftrightarrow L_{nm} = L_{mn}^*$
2. Каждому состоянию физической системы сопоставляется нормированная волновая функция  $\Psi$ .
3. Физическая величина  $L$  может принимать только собственные значения оператора  $\hat{L}$ .
4. Математическое ожидание  $\langle L \rangle$  значений величины  $L$  в состоянии  $\Psi$  определяется диагональным матричным элементом  $\langle L \rangle = \langle \Psi | \hat{L} | \Psi \rangle$
5. Матричные элементы операторов декартовых координат и декартовых компонент обобщенного импульса  $\hat{x}_i$ ;  $\hat{p}_k$ , вычисленные между волновыми функциями системы  $f$  и  $g$ , удовлетворяют уравнениям Гамильтона классической механики:

$$\frac{d}{dt} \langle f | \hat{p}_i | g \rangle = - \langle f | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_i} | g \rangle \frac{d}{dt} = \langle f | \hat{x}_i | g \rangle = \langle f | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} | g \rangle$$

$\hat{H}$  - оператор, соответствующий классической функции Гамильтона

6. Операторы  $\hat{p}_i$  и  $\hat{x}_i$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] = i\hbar\delta_{ik} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_k] = 0 \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0$$

*Замечания*

1. Если есть физическая величина  $L(x_i, p_k)$ , то для построения оператора  $\hat{L}$  заменяем в ней  $p_k \rightarrow \hat{p}_k$ ,  $x_i \rightarrow \hat{x}_i$ , члены вида  $x_i p_k$  заменяем таким образом, чтобы соблюдалась эрмитовость. Например

$$W(x_i, p_i) = \sum_i x_i p_i \rightarrow \hat{W}(\hat{x}_i, \hat{p}_i) = \sum_i \frac{1}{2} \{\hat{p}_i, \hat{x}_i\}.$$

2. Если  $\Psi$  не есть СФ  $\hat{L}$ , то  $\Psi = \sum_n a_n \Psi_n$ , где  $\hat{L}\Psi = \lambda_n \Psi_n$ .  $\hat{L}\Psi = \sum_n \lambda_n a_n \Psi_n$ ,

$$\langle L \rangle = \langle \Psi | \hat{L} | \Psi \rangle = \sum_{m,n} a_m^* a_n \lambda_n \langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = \sum_m |a_m|^2 \lambda_m$$

$|a_m|^2$  - вероятность принять значение  $\lambda_m$ .

3. Под производной оператора подразумевается

$$\frac{\partial F(\hat{L})}{\partial \hat{L}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{F(\hat{L} + \varepsilon \hat{I}) - F(\hat{L})}{\varepsilon} \right].$$

Волновая функция описывает только чистые состояния. Свойства матрицы плотности.

1. Всякое состояние (чистое или смешанное) описывается матрицей плотности  $\hat{\rho}$ . Она эрмитова:  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^+$ .
2. Все собственные значения  $\rho$  лежат в интервале  $[0, 1]$ ;  $\rho | \Psi_i \rangle = p_i | \Psi_i \rangle$ ,  $0 \leq p_i \leq 1$  - вероятность чистого состояния  $| \Psi_i \rangle$ .
3. Условие нормировки:  $\text{Sp } \rho = \sum_n \rho_{nn} = 1$
4. Если  $\rho$ - матрица плотности, то вероятность находиться в состоянии  $\Psi$  равна  $P_{|\Psi\rangle} = \langle \Psi | \rho | \Psi \rangle$ .
5. Среднее значение физической величины  $\hat{A}$  в состоянии с м.п.  $\rho$   $\langle A \rangle = \text{Sp}(\hat{A}\rho)$
6. Необходимое и достаточное условие чистоты  $\rho^2 = \rho$ . При этом  $\rho = | \Psi \rangle \langle \Psi |$ ,  $| \Psi \rangle$  - чистое состояние.

#### Атомка-4. Принцип неопределенности.

Пусть  $\hat{K}$  и  $\hat{F}$  - самосопряженные операторы,  $[\hat{K}, \hat{F}] = i\hat{M}$ , где  $\hat{M}$  - тоже самосопряженный оператор. Средние значения  $K$  и  $F$  по состоянию  $\Psi$ :

$$\langle K \rangle = \langle \Psi | \hat{K} | \Psi \rangle, \quad \langle F \rangle = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle$$

Операторы отклонения от средних значений:

$$\widehat{\Delta K} = \hat{K} - \langle K \rangle, \quad \widehat{\Delta F} = \hat{F} - \langle F \rangle.$$

Для них также выполняется коммутационное соотношение

$$[\widehat{\Delta K}, \widehat{\Delta F}] = i\hat{M}$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$I(\alpha) = \int \left| (\alpha \widehat{\Delta K} - i \widehat{\Delta F}) \Psi \right|^2 dV \geq 0$$

$$I(\alpha) = \int \Psi^* (\alpha \widehat{\Delta K} + i \widehat{\Delta F}) (\alpha \widehat{\Delta K} - i \widehat{\Delta F}) \Psi dV \geq 0$$

$$(\alpha \widehat{\Delta K} + i \widehat{\Delta F}) (\alpha \widehat{\Delta K} - i \widehat{\Delta F}) = \alpha^2 (\widehat{\Delta K})^2 + \alpha \hat{M} + (\widehat{\Delta F})^2 \geq 0$$

$$D = \hat{M}^2 - 4(\widehat{\Delta K})^2 (\widehat{\Delta F})^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\widehat{\Delta K})^2 (\widehat{\Delta F})^2 \geq \frac{\hat{M}^2}{4}$$

Для средних значений

$$\langle (\Delta F)^2 \rangle \langle (\Delta K)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle M \rangle^2$$

Если положить  $\hat{K} = \hat{x}$ ,  $\hat{F} = \hat{p}$ , получим соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

## Атомка-5. Описание эволюции квантовомеханических систем. Уравнения Гейзенберга и Шредингера. Стационарные состояния.

Эволюцию квантовомеханической системы можно рассматривать двумя способами:

1) Операторы физических величин зависят от времени, а ВФ - нет. Тогда для оператора  $\hat{F}(t)$  физической величины выполняется уравнение Гейзенберга:

$$\frac{d}{dt}\hat{F}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{F}(t)]$$

для консервативных систем,  $\hat{F}$  не зависит от времени явно. Решение

$$\hat{F}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{F}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}.$$

Общий вид:

$$\frac{d}{dt}\hat{F}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{F}(t) + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{F}(t)].$$

2) ВФ состояний зависят от времени, а операторы физических величин - нет. Уравнение Шредингера:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle$$

Состояния, описываемые собственными функциями гамильтониана  $\hat{H}$  называются стационарными, а множество СЗ - энергетическим спектром.  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  - стационарное уравнение Шредингера. Решение  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|\Psi(0)\rangle$ .



**Атомка-6. Линейный квантовый гармонический осциллятор. Энергии и волновые функции стационарных состояний.**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

Введем операторы:

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+), \quad x_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{km}}, \quad x_0 p_0 = \hbar$$

$$\hat{p} = \frac{p_0}{\sqrt{2i}}(\hat{a} - \hat{a}^+), \quad p_0^2 = \hbar\sqrt{km}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где  $\hat{a}^+$  - оператор рождения,  $\hat{a}$  - оператор уничтожения.

Если выразить  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$  через  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  и воспользоваться коммутационными соотношениями для  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ , то можно показать, что

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1,$$

$$(\hat{a})^+ = \hat{a}^+$$

Гамильтониан тогда примет вид  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = [\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}), \hat{a}] = \hbar\omega[\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\hat{a}^+ \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{=0} + \hbar\omega \underbrace{[\hat{a}^+, \hat{a}]}_{=-1} \hat{a} = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega\hat{a}$$

Пусть нашли решение  $\hat{H}\Psi = E\Psi$ . Рассмотрим состояние  $|\chi\rangle = \hat{a}|\Psi\rangle$

$$\hat{H}|\chi\rangle = \hat{H}\hat{a}|\Psi\rangle = ([\hat{H}, \hat{a}] + \hat{a}\hat{H})|\Psi\rangle =$$

$$= (-\hbar\omega\hat{a} + E\hat{a})|\Psi\rangle = (E - \hbar\omega)\hat{a}|\Psi\rangle = (E - \hbar\omega)|\chi\rangle,$$

$$\hat{H}|\xi\rangle = \hat{H}\hat{a}^+|\Psi\rangle = (E + \hbar\omega)|\xi\rangle.$$

Таким образом:

- $\hat{a}$  - увеличивает энергию на  $\hbar\omega$ ,
- $\hat{a}^+$  - уменьшает энергию на  $\hbar\omega$ ,

и строят ненормированные ВФ.

Введем основное состояние  $|0\rangle$  - вакуум:  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ,  $\langle 0|0\rangle = 1$ :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + \frac{i\hat{p}}{p_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) = 0, \quad \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{x}{x_0^2},$$

$$\psi_0 = \frac{e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} \int dx |\psi_0|^2 = 1$$

$\psi_0(x) \equiv |0\rangle$  в координатном представлении

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega (\hat{a}^+ \hat{a} + 1/2) |0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} |0\rangle$$

$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$  - энергия основного состояния. Можно доказать следующие равенства:

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega (n+1/2) |n\rangle$$

$$a a^+ |n\rangle = (n+1) |n\rangle$$

$$a^+ a |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\langle n | n \rangle = 1$$

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$$

Все ВФ строятся следующим образом:

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n+1}} |n\rangle$$

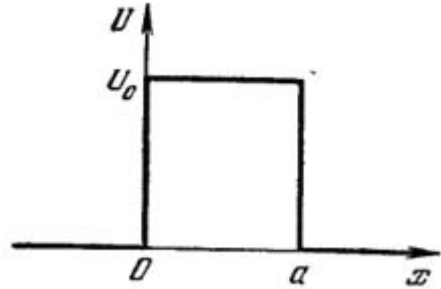
$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

# Атомка-7. Прохождение частиц через потенциальный барьер. Туннельный эффект.

Гамильтониан свободной частицы в координатном представлении:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Уравнение Шредингера:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$ . Решения:  $\psi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}x} +$



$Be^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}x}$  Потенциальный барьер

$$x < 0 \quad \psi_1 = e^{ikx} + Be^{-ikx} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

$$0 < x < a \quad \psi_2 = B_1 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} \quad q = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - U_0)}$$

$$x > a \quad \psi_3 = Ce^{ikx}$$

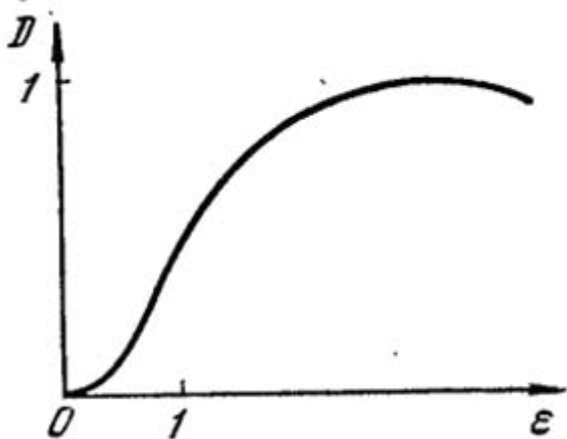
$D = |C|^2$  - коэффициент прохождения. Потребуем непрерывности волновых функций  $\psi$  и  $\psi'$  на границе потенциального барьера (точки  $x = 0$ ,  $x = a$ ). В  $x = 0$ :  $1 + A = B_1 + B_2$ ,  $k(1 - A) = (B_1 - B_2)q$  В  $x = a$ :  $B_1 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = Ce^{ika}$ ,  $q(B_1 e^{iqa} - B_2 e^{-iqa}) = kCe^{ika}$  Отсюда

$$D(E) = \left( 1 + \left( \frac{(k^2 - q^2) \sin qa}{2kq} \right)^2 \right)^{-1}$$

Если  $E < U_0$ , то  $q$  - чисто мнимое.

$$D(E) = \left( 1 + \left( \frac{(k^2 + \gamma^2) \operatorname{sh} a\gamma}{2k\gamma} \right)^2 \right)^{-1} > 0, \quad \gamma = \operatorname{Im}q > 0$$

$D(E) \neq 0$  при конечных  $a$ .



$$\varepsilon = E/U_0$$

Туннельный эффект - прохождение частицей потенциального барьера когда ее полная энергия меньше высоты барьера.

## Атомка-8. Движение частиц в периодическом потенциале.

$U(x) = U(x + a)$  Гамильтониан

$$\hat{H}(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x + a) = \hat{H}(x + a) \quad (1)$$

По теореме Блоха для такого гамильтониана СФ можно представить в виде:  $\psi_k(x) = e^{i\vec{k}\vec{x}}u_k(x)$ , где  $\vec{k}$  - произвольный вещественный вектор, а  $u_k(x) = u_k(x + a)$  - периодическая функция. Можно показать, что для системы с гамильтонианом, удовлетворяющим (1), выполняется соотношение  $\psi(x + na) = e^{inkx}\psi(x)$

Рассмотрим свойства спектра:

$$0 < x < a \quad \psi_1(x) = Au_1(x) + Bu_2(x)$$

$$a < x < 2a \quad \psi_2(x) = e^{ikx}\psi_1(x - a) = e^{ikx}(Au_1(x - a) + Bu_2(x - a))$$

$u_1$  и  $u_2$  - фундаментальные решения УШ.

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(a) &= \psi_2(a) \\ \psi'_1(a) &= \psi'_2(a) \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} Au_1(a) + Bu_2(a) &= e^{ika}(Au_1(0) + Bu_2(0)) \\ Au'_1(a) + Bu'_2(a) &= e^{ika}(Au'_1(0) + Bu'_2(0)) \end{aligned}$$

Условие разрешимости

$$\det \begin{vmatrix} u_1(a) - e^{ika}u_1(0) & u_2(a) - e^{ika}u_2(0) \\ u'_1(a) - e^{ika}u'_1(0) & u'_2(a) - e^{ika}u'_2(0) \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos ka = \frac{(u_1(0)u'_2(a) + u_1(a)u'_2(0)) - (u_2(0)u'_1(a) + u_2(a)u'_1(0))}{2(u_1u'_2 - u'_1u_2)}$$

(аргументы в знаменателе не важны, т.к. это определитель Вронского, он не зависит от  $x$ )

$E = E(k)$  - полосы, где есть решение - разрешенная зона (правая часть  $\leq 1$ ) и полосы, где нет решения - запрещенная зона (правая часть  $> 1$ ).

С ростом  $E$  запрещённые зоны сужаются, разрешённые зоны расширяются.

## Атомка-9. Угловой момент. Сложение моментов.

$$M_{\alpha}^{kA} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x^{\beta} p^{\gamma} \Rightarrow \hat{M}^{kA} = \hbar \hat{l}$$

$\hat{l}$  - оператор момента отдельной частицы.

$$\hat{l}_{\alpha} = \frac{1}{\hbar} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{x}_{\beta} \hat{p}_{\gamma},$$

$$\left[ \hat{l}_{\alpha}, \hat{x}_{\beta} \right] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{x}_{\gamma}, \quad \left[ \hat{l}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta} \right] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{p}_{\gamma}, \quad \left[ \hat{l}_{\alpha}, \hat{l}_{\beta} \right] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_{\gamma},$$

$\hat{L}$  - оператор полного момента системы:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2,$$

$$\text{СЗ: } \vec{L}^2 = L(L+1), \quad L_z = M, \quad M = L, L-1, \dots, -L$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y; \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

$$\left[ \hat{L}_+, \hat{L}_- \right] = 2\hat{L}_z, \quad \left[ \hat{L}_z, \hat{L}_+ \right] = \hat{L}_+, \quad \left[ \hat{L}_z, \hat{L}_- \right] = -\hat{L}_-,$$

Три компоненты момента не могут одновременно иметь определённые значения. Квадрат момента может иметь определённое значение одновременно с одной из его составляющих.

*Сложение моментов* Рассмотрим систему, состоящую из двух слабо взаимодействующих частей. При полном пренебрежении взаимодействием для каждой из них справедлив закон сохранения момента импульса, а полный момент  $\vec{L}$  всей системы можно рассматривать как сумму моментов  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  ее частей. В следующем приближении при учете слабого взаимодействия законы сохранения  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  уже не выполняются строго, но определяющие их квадраты чисел  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  остаются «хорошими» квантовыми числами, пригодными для приближенного описания состояния системы. Наглядно, т. е. рассматривая моменты классически, можно сказать, что в этом приближении  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  вращаются вокруг направления  $\vec{L}$ , оставаясь неизменными по величине. В связи с рассмотрением таких систем возникает вопрос о законе сложения моментов. Каковы возможные значения  $\vec{L}$  при заданных значениях  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$ ? Что касается закона сложения для проекций момента, то он очевиден: из  $L_z = L_{1z} + L_{2z}$  следует, что и

$$M = M_1 + M_2$$

. Для операторов же квадратов моментов самого простого соотношения нет и для вывода их «закона сложения» рассуждаем следующим образом.

Если выбрать в качестве полной системы физических величин величины  $\vec{L}_1^2, \vec{L}_2^2, L_{1z}, L_{2z}$ , то каждое состояние будет определяться значениями чисел  $L_1, L_2, M_1, M_2$ . При заданных  $L_1$  и  $L_2$  числа  $M_1, M_2$  пробегают соответственно по  $(2L_1 + 1)$  и  $(2L_2 + 1)$  значений, так что всего имеется  $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$  различных состояний с одинаковыми  $L_1, L_2$ ;  $\vec{L} = (L_1 + L_2), \dots, |L_1 - L_2|$ . Волновые функции состояний в этом описании обозначим как  $\varphi_{L_1 L_2 M_1 M_2}$ .

Вместо четырех указанных величин в качестве полной системы можно выбрать четыре величины  $\vec{L}_1^2, \vec{L}_2^2, \vec{L}^2, L_z$ . Тогда каждое состояние будет характеризоваться значениями чисел  $L_1, L_2, L, M$  (соответствующие волновые функции обозначим как  $\psi_{L_1 L_2 L M}$ ). При заданных  $L_1$  и  $L_2$  должно быть, разумеется, по-прежнему  $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$  различных состояний, т.е. при заданных  $L_1, L_2$  пара чисел  $L, M$  может пробегать  $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$  пар значений. Эти значения можно определить следующими рассуждениями. Складывая друг с другом различные допустимые значения  $M_1$  и  $M_2$ , получим соответствующие значения  $M$ :

$M_1$	$M_2$	$M$
$L_1$	$L_2$	$L_1 + L_2$
$L_1$	$L_1 - 1$	$L_1 + L_2 - 1$
$L_2 - 1$	$L_2$	
$L_1 - 1$	$L_2 - 1$	$L_1 + L_2 - 2$
$L_1 - 1$	$L_2 - 2$	
$L_1 - 2$	$L_2$	
.....		

Мы видим, что наибольшее возможное значение  $M$  есть  $M = M_1 + M_2$ , причем ему отвечает одно состояние  $\varphi$  (одна пара значений  $M_1, M_2$ ). Поэтому и наибольшее возможное значение  $M$  в состояниях  $\varphi$ , а следовательно, и наибольшее  $L$ , есть  $L_1 + L_2$ . Далее, имеются два состояния  $\varphi$  с  $M = L_1 + L_2 - 1$ . Следовательно, должны быть и два состояния  $\varphi$  с этим значением  $M$ ; одно из них есть состояние с  $L = L_1 + L_2$  (и  $M = L - 1$ ), а другое — с  $L = L_1 + L_2 - 1$  (причем  $M = L$ ). Для значения  $M = L_1 + L_2 - 2$  есть три различных состояния  $\varphi$ . Это значит, что наряду со значениями  $L = L_1 + L_2, L = L_1 + L_2 - 1$  возможно также и значение  $L = L_1 + L_2 - 2$ .

Эти рассуждения можно продолжать в таком же виде, пока при уменьшении  $M$  на 1 увеличивается на 1 число состояний с заданным значением  $M$ . Легко сообразить, что это будет иметь место до тех пор, пока  $M$  не достигнет значения  $|L_1 - L_2|$ . При дальнейшем уменьшении  $M$  число состояний перестанет возрастать, оставаясь равным  $2L_2 + 1$  (если  $L_2 \leq 1$ ). Это значит, что  $|L_1 - L_2|$  есть наименьшее возможное значение  $L$ .

Таким образом, мы приходим к результату, что при заданных  $L_1$  и  $L_2$  число  $L$  может пробегать значения

$$L = L_1 + L_2, L_1 + L_2 - 1, \dots, |L_1 - L_2|,$$

всего  $L_2 + 1$  (считая, что  $L_2 \leq L_1$ ) различных значений. Легко проверить, что получается действительно  $(2L_1 + 1) \times (2L_2 + 1)$  различных значений пары чисел  $M, L$ .



## Атомка-10. Движение в центральном поле. Атом водорода: волновые функции и уровни энергии.

Если взаимодействие 2-х частиц можно описать потенциалом  $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ , то задача сводится к задаче о движении частицы в центрально-симметричном поле. Лагранжиан

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|); \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r); \quad M = m_1 + m_2; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Импульсы: } \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}}, \quad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}}.$$

Гамильтониан  $p = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} + U(r)$ . Оператор Гамильтона получим, заменяя  $\vec{P}$  и  $\vec{p}$  операторами

$$[P_i, R_k] = -i\hbar\delta_{ik}, \quad [p_i, r_k] = -i\hbar\delta_{ik}$$

Гамильтониан в операторном виде

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + U(r)$$

Волновая функция

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{R})\psi(\vec{r}),$$

где  $\varphi(\vec{R})$  описывает движение центра инерции,  $\psi(\vec{r})$  - движение частицы  $m$  в поле  $U(r)$ . Для стационарных состояний:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\psi = 0$$

В сферической СК:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)]\psi = 0$$

Вводя оператор орбитального момента

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_- \hat{l}_+ + \hat{l}_z^2 + \hat{l}_z = - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

получим

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\hat{l}^2}{r^2} \psi \right) + U(r)\psi = E\psi$$

$\hat{l}^2$  и  $\hat{l}_z$  коммутируют с  $\hat{H}$ , следовательно, существуют функции, являющиеся собственными для операторов  $\hat{H}$ ,  $\hat{l}^2$ ,  $\hat{l}_z$  одновременно. Будем рассматривать стац. состояния с определенными значениями момента  $l$  и его проекцией  $m$ . Решение ищем в виде:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где  $Y_{lm}$  - сферические функции

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} (-1)^{ml} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta),$$

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{m+l}}{(d \cos \theta)^{m+l}} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

Для радиальной функции  $R(r)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] R = 0$$

В случае водородоподобных атомов

$$\frac{2R}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \frac{\alpha}{r} \right] R = 0, \quad \alpha = Ze^2$$

В атомных единицах ( $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \cdot 10^{-8}$  см,  $t_0 = \frac{\hbar^3}{me^4} = 0.242 \cdot 10^{-16}$  с) уравнение примет вид:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + 2 \left( E + \frac{1}{r} \right) R = 0$$

При  $E < 0$  движение финитно и энергетический спектр дискретен. Обозначим:  $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}$ ,  $\rho = \frac{2r}{n}$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \frac{n}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0$$

При  $\rho \rightarrow \infty$ , опуская члены  $\sim \rho^{-1}, \rho^{-2}$ , получим:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = \frac{R}{4}$$

Подстановка  $R(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \omega(\rho)$

$$\rho \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} + (2l + 2 - \rho) \frac{d\omega}{d\rho} + (n - l - 1) \omega = 0$$

Подставим  $\omega(\rho)$  в виде степенного ряда

$$\omega(\rho) = 1 + \frac{0 - \nu}{0 + \lambda} \rho + \frac{(0 - \nu)(1 - \nu)}{(0 + \lambda)(1 + \lambda)} \frac{\rho^2}{2} + \dots,$$

где  $\lambda = 2l + 2$ ,  $\nu = n - l - 1$ . Отсюда энергетический спектр  $E_n = -\frac{1}{2n^2}$ , или в обычных единицах  $E_n = -Z^2 \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$ .

# Атомка-11. Стационарная теория возмущений в отсутствие и при наличии вырождения. Эффекты Зеемана и Штарка.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}; \\ \hat{H}_0\psi^{(0)} &= E^{(0)}\psi^{(0)}; \\ \hat{H}\psi &= (\hat{H}_0 + \hat{V})\psi = E\psi\end{aligned}$$

Пусть уровни *невыврожденные*, спектр дискретный. Разложим  $\psi$  по СФ  $\psi_n^{(0)}$ :

$$\psi = \sum_m C_m \psi_m^{(0)} \Rightarrow \sum_m C_m (E_m^{(0)} + \hat{V})\psi_m^{(0)} = \sum_m C_m E \psi_m^{(0)}$$

Умножая на  $\psi_k^{(0)}$  и интегрируя, найдем:

$$(E - E_k^{(0)})C_k = \sum_m V_{km} C_m, \quad V_{km} = \int \psi_k^{(0)*} \hat{V} \psi_m^{(0)} dq \quad (1)$$

Будем искать значения коэффициентов  $C_m$  и энергии  $E$  в виде рядов

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} + \dots, \quad C_m = C_m^{(0)} + C_m^{(1)} + C_m^{(2)} + \dots,$$

где  $E^{(1)}, c_m^{(1)} \sim O(\hat{V})$ ,  $E^{(2)}, c_m^{(2)} \sim O(\hat{V}^2)$ . Определим поправки к  $n$ -му СЗ и СФ, полагаем  $C_n^{(0)} = 1$ ,  $C_m^{(0)} = 0$ ,  $m \neq n$ . Для отыскания первого приближения подставим в (1)  $E = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$ ,  $C_k = C_k^{(0)} + C_k^{(1)}$ . Уравнение с  $k = n$  дает:

$$E_n^{(1)} = V_{nn} = \int \psi_n^{(0)*} \hat{V} \psi_n^{(0)} dq.$$

Таким образом, поправка первого приближения к собственному значению  $E_n^{(0)}$  равна среднему значению возмущения в состоянии  $\psi_n^{(0)}$ .

Уравнение (1) с  $k \neq n$  даёт

$$C_k^{(1)} = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad k \neq n,$$

а  $C_n^{(1)}$  остается произвольным и оно должно быть выбрано так, чтобы  $\psi_n = \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)}$  была нормирована с точностью до членов 1-го порядка

включительно. Для этого надо положить  $C_n^{(1)} = 0$ . Действительно, функция

$$\psi_n^{(1)} = \sum'_m \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \quad (2)$$

(штрих означает суммирование по  $m \neq n$ ) ортогональна  $\psi_n^{(0)}$ , а поэтому интеграл от  $|\psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)}|^2$  отличается от единицы лишь на величину второго порядка малости.

Формула (2) определяет поправку первого приближения к волновым функциям. Из нее, кстати, видно, каково условие применимости рассматриваемого метода. Именно, должно иметь место неравенство

$$|V_{mn}| \ll |E_n^{(0)} - E_n^{(1)}|,$$

т.е. матричные элементы возмущения должны быть малы по сравнению с соответствующими разностями невозмущённых уровней энергии.

*Случай вырожденный.* Обратимся теперь к случаю, когда невозмущённый оператор  $\hat{H}_0$  имеет вырожденных СЗ. Будем обозначать посредством  $\psi_n^{(0)}, \psi_{n'}^{(0)}, \dots$  СФ, относящиеся к одному и тому же СЗ энергии  $E_n^{(0)}$ . Правильные функции нулевого приближения - линейные комбинации вида

$$C_n^{(0)} \psi_n^{(0)} + C_{n'}^{(0)} \psi_{n'}^{(0)} + \dots$$

Коэффициенты в этих комбинациях определяются, вместе с поправками первого приближения к СЗ, следующим образом.

Выпишем ур-я (1) с  $k = n, n', \dots$ , подставив в них в первом приближении  $E = E_n^{(0)} + E^{(1)}$ , причём для величин  $C_k$  достаточно ограничиться нулевыми значениями  $c_n = c_n^{(0)}, c_{n'} = c_{n'}^{(0)}, \dots; c_m = 0$  при  $m \neq n, n', \dots$ . Тогда получим

$$E^{(1)} C_n^{(0)} = \sum_{n'} V_{nn'} C_{n'}^{(0)},$$

или

$$\sum_{n'} (V_{nn'} - E^{(1)} \delta_{nn'}) c_{n'}^{(0)} = 0, \quad 3$$

где  $n, n'$  пробегают все значения Ю нумерующие состояния, относящиеся к данному невозмущённому СЗ  $E_n^{(0)}$ . Эта система однородных линейных

уравнений для величин  $c_n^{(0)}$  имеет отличные от нуля решения при условии обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных. Таким образом, получаем уравнение

$$|V_{nn'} - E^{(1)}\delta_{nn'}| = 0 \quad (4)$$

Это уравнение —  $s$ -й степени по  $E^{(1)}$  и имеет, вообще говоря,  $s$  различных вещественных корней. Эти корни и представляют собой искомые поправки первого приближения к СЗ. Уравнение (4) называют секулярным.

Подставляя поочередно корни этого уравнения в систему (3), найдем  $C_n^{(0)}$  и т.о. определим СФ нулевого приближения.

В результате возмущения первоначально вырожденный уровень энергии перестаёт, вообще говоря, быть вырожденным (корни уравнения (4), вообще говоря, различны); как говорят, возмущение «снимает» вырождение. Снятие вырождения может быть как полным, так и частичным (в последнем случае после наложения возмущения остаётся вырождение меньшей кратности, чем первоначальная).

### *Эффект Зеемана.*

Рассмотрим атом, находящийся в однородном магнитном поле  $\vec{H}$ . Его гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_a \left[ \hat{p}_a + \frac{|e|\hbar}{c} \vec{A}(\vec{r}_a) \right]^2 + U + \frac{|e|\hbar}{mc} \vec{H} \hat{S},$$

где суммирование производится по всем электронам,  $U$  — энергия взаимодействия электронов друг с другом,  $\hat{S} = \sum_a \hat{s}_a$  — оператор полного (электронного) спина атома.

Если векторный потенциал выбран в виде  $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H}\vec{r}]$ , то оператор  $\hat{p}$  коммутативен с  $\vec{A}$ . Учитывая это при раскрытии квадрата, и обозначая через  $\hat{H}_0$  гамильтониан атома в отсутствие поля, находим

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{|e|\hbar}{2mc} \sum_a [\vec{r}_a \hat{p}_a] + \frac{e^2}{8mc^2} \sum_a [\vec{H}\vec{r}_a]^2 + \frac{|e|\hbar}{mc} \vec{H} \hat{S}.$$

Но векторное произведение  $[\vec{r}_a \hat{p}_a]$  есть оператор орбитального момента электрона, а суммирование по всем электронам даёт оператор  $\hbar\vec{L}$  полного орбитального момента атома. Таким образом,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \mu_B(\vec{L} + 2\hat{S})\vec{H} + \frac{e^2}{8mc^2} \sum_a [\vec{H}\vec{r}_a]^2. \quad (5)$$

Внешнее магнитное поле расщепляет атомные уровни, снимая вырождение по направлениям полного момента (эффект Зеемана). Определим энергию этого расщепления для атом- атомных уровней, характеризующихся определенными значениями квантовых чисел  $J, L, S$  (т. е. предполагая для уровней случай  $LS$ -связи).

Будем считать магнитное поле настолько слабым, что  $\mu_B H$  мало по сравнению с расстояниями между уровнями энергии атома, в том числе по сравнению с интервалами тонкой структуры уровней. Тогда второй и третий члены в (5) можно рассматривать как возмущение, причем невозмущенными уровнями являются отдельные компоненты мультиплетов. В первом приближении третьим членом, квадратичным по полю, можно пренебречь по сравнению с линейным вторым членом. В этом приближении энергия расщепления  $\Delta E$  определяется средними значениями возмущения в состояниях (невозмущенных), отличающихся значениями проекции полного момента на направление поля. Выбрав это направление в качестве оси  $z$ , имеем

$$\Delta E = \mu_B H (\bar{L}_z + 2\bar{S}_z) = \mu_B H (\bar{J}_z + \bar{S}_z). \quad (6)$$

Среднее значение  $\bar{J}_z$  совпадает просто с заданным собственным значением  $\bar{J}_z = M_J$ . Среднее же значение  $\bar{S}_z$  можно найти следующим образом с помощью «поэтапного» усреднения.

Усредним сначала оператор  $\hat{\mathbf{S}}$  по состоянию атома с заданными значениями  $S, L$  и  $J$ , но не  $M_J$ . Усредненный таким образом оператор  $\hat{\mathbf{S}}$  может быть «направлен» лишь вдоль  $\mathbf{J}$  — единственного сохраняющегося «вектора», характеризующего свободный атом. Поэтому можно написать

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{const} \mathbf{J}.$$

В таком виде, однако, это равенство имеет лишь условный смысл, поскольку три компоненты вектора  $\mathbf{J}$  не могут иметь одновременно определенных значений. Буквальный же смысл имеет его  $z$ -проекция

$$\bar{S}_z = \text{const} \cdot J_z = \text{const} \cdot M_J$$

и равенство

$$\bar{\mathbf{S}} \mathbf{J} = \text{const} \mathbf{J}^2 = \text{const} \cdot J(J+1),$$

получающиеся умножением обеих его частей на  $\mathbf{J}$ . Внеся сохраняющийся вектор  $\mathbf{J}$  под знак среднего, пишем  $\bar{\mathbf{S}} \mathbf{J} = \overline{\mathbf{S} \mathbf{J}}$ . Среднее же значение  $\overline{\mathbf{S} \mathbf{J}}$

совпадает с собственным значением

$$\mathbf{S}\mathbf{J} = \frac{1}{2}[J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)],$$

которому оно равно в состоянии с определенными значениями  $\mathbf{L}^2$ ,  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{J}^2$ . Определив const из второго равенства и подставив в первое, имеем, таким образом,

$$S_z = M_J \frac{\mathbf{J}\mathbf{S}}{J^2}$$

Собрав полученные выражения и подставив в (6), находим следующее окончательное выражение для энергии расщепления:

$$\Delta E = \mu_B g M_J H, \quad (7)$$

где

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

есть так называемый множитель Ланде или гиромагнитный множитель. Отметим, что  $g = 1$ , если спин отсутствует ( $S = 0$ , так что  $J = L$ ) - нормальный эффект Зеемана, и  $g = 2$ , если  $L = 0$  (так что  $J = S$ ) - аномальный эффект Зеемана.

Формула (7) даёт различные значения энергии для всех  $2J+1$  значений  $M_J = -J, \dots, +J$ . Другими словами, магнитное поле полностью снимает вырождение уровней по направлениям момента.

*Эффект Штарка (атом в электрическом поле)*

$V = -dE = -Ed_z$ ,  $d$ - дипольный момент, состояние с разными  $M$  - разная энергия. 1е приближение - линейное - определяется диагональными матричными элементами возмущения, но диагональные матричные элементы дипольного момента равны нулю. Поэтому эффект Штарка - эффект второго порядка по полю (кроме водорода, у которого эффект линейный).  $\Delta E_n = -\frac{1}{2}\alpha_{ik}E_iE_k$ ;  $\alpha_{ik}^{(n)}$  - симметричный тензор. Выбрав ось  $z$  в направлении поля, получим

$$\Delta E_n = -\frac{1}{2}d_{zz}^{(n)}E^2; \quad (8)$$

Тензор  $\alpha_{ik}^{(n)}$  представляет собой в то же время поляризуемость атома во внешнем электрическом поле

$$\bar{d}_i^{(n)} = \frac{\partial \Delta E_n}{\partial E_i} = \alpha_{ik}^{(n)} E_k$$



Вычисление поляризуемости должно производиться по общим правилам теории возмущений. Согласно формуле второго приближения имеем

$$\alpha_{ik}^{(n)} = -2 \sum'_m \frac{(d_i)_{nm} (d_k)_{mn}}{E_n - E_m}.$$

Поляризуемость атома зависит от его (невозмущенного) состояния, в том числе от квантового числа  $M_J$ . Эта последняя зависимость может быть установлена в общем виде. Значения  $\alpha_{ik}^{(n)}$  для различных значений  $M_J$  можно рассматривать как собственные значения оператора

$$\hat{\alpha}_{ik}^{(n)} = \alpha_n \delta_{ik} + \beta_n (\hat{J}_i \hat{J}_k + \hat{J}_k \hat{J}_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \hat{\mathbf{J}}^2); \quad (9)$$

это есть общий вид симметричного тензора второго ранга, зависящего от вектора  $\hat{\mathbf{J}}$ . Из (8) и (9) имеем

$$\Delta E_n = -\frac{E^2}{2} \left\{ \alpha_n + 2\beta_n \left[ M_J^2 - \frac{1}{3} J(J+1) \right] \right\}. \quad (10)$$

При суммировании по всем значениям  $M_J$  второй член в фигурных скобках обращается в нуль, так что первый член представляет собой общее смещение «центра тяжести» расщепленного уровня. Отметим также, что, согласно (10), уровень с  $J = 1/2$  остается нерасщепленным.

## Атомка-12. Уравнение Дирака. Квазирелятивистское приближение. Спин-орбитальное взаимодействие. Тонкая структура спектра атома водорода.

1. В релятивистской теории волновое уравнение имеет вид:  $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ , где гамильтониан системы (для свободной частицы) имеет вид:  $\hat{H} = C(\alpha\hat{p}) + mc^2\beta$ , где  $\hat{p}$  - оператор импульса. Пусть  $\mathcal{E}^2 = c^2p^2 + m^2c^4$  - релятивистская энергия частицы. Тогда из условия  $\hat{H}^2 = \mathcal{E}^2$  получаем:

$$\begin{cases} \beta^2 = 1 \\ \beta\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\beta = 0 \\ \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik} \end{cases}$$

Этим требованиям удовлетворяют матрицы  $\alpha_i$  и  $\beta$  порядка  $4K$ . При  $K = 1$  - уравнение Дирака:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [c(\vec{\alpha}\hat{p}) + mc^2\beta]\psi$$

Стандартное представление:

$$\beta = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix},$$

$I$  - единичная субматрица порядка  $K$ .

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{vmatrix}, \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- матрицы Паули. *Оператор спина*:  $\vec{\alpha}$  и  $p$  не зависят от пространственных переменных, и как результат коммутируют с  $\hat{l}$ . Следовательно, в случае свободного движения  $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$  - оператор полного момента частицы - является интегралом движения. *Стационарное решение уравнения Дирака* (для свободной частицы с заданными значениями  $\hat{p}_i$ )

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}); \quad \psi(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \\ \frac{c}{mc^2 + \mathcal{E}} \vec{\sigma} \vec{p} \vec{a} \end{vmatrix} \exp(i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}),$$

где  $\vec{a}$  - спиновая функция, не зависящая от координат.  $\mathcal{E} = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$ , при  $\mathcal{E} > 0$  - положительные решения,  $\mathcal{E} < 0$  - отрицательные.

## 2. Квазирелятивистское приближение.

Рассматриваются системы, состоящие из постоянного числа частиц, с неизменным импульсом:

а). Соотношение неопределённостей  $(\Delta p_x)^2(\Delta x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ : если линейные размеры пространства, в котором локализована частица  $\Delta x < \frac{\hbar}{4mc}$ , то  $\frac{p^2}{2m} > 2mc^2$  - энергия, достаточная для образования пары частиц массы  $m$ .

б).  $\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x}$ ;  $\Delta x \approx c * \Delta t \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{c\Delta t}$ , где  $\Delta t$  - время, за которое реализуется данное состояние движения. В стационарном случае  $\Delta t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta p \rightarrow 0$ .

*Вывод:* приближение применимо для стационарных систем с энергиями много меньшими энергий покоя частиц системы  $mc^2$ .

## 3. Спин-орбитальное взаимодействие.

Учет релятивистских поправок к гамильтониану заряда во внешнем электрическом поле дает:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3;$$

$E = -\frac{mz^2e^4}{2\hbar^2n^2}$  - энергия спектра без учета поправок.

$\hat{V}_1 = -\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}$  - учет релятивистской зависимости кинетической энергии от импульса.

$\hat{V}_2 = -\frac{\hbar\vec{\sigma}}{4m^2c^2}[(\nabla U) \times \vec{p}]$  - энергия спин-орбитального взаимодействия (взаимодействия движущего магнитного момента с электрическим полем)

В центральном поле:  $\nabla U = \frac{\vec{r}}{r} \frac{dU(r)}{dr} \Rightarrow \hat{V}_2 = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r} \frac{dU}{dr} \hat{l}\hat{s}$ ,  $\hat{V}_3 = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \nabla^2 U$  - энергия контактного взаимодействия.

4. *Тонкая структура спектра атома водорода.* Кулоновское поле ядра:  $U = -\frac{z}{r}$  - учет в первом порядке теории возмущений.

$\hat{V}_3 = -\frac{\alpha^2 z}{8} 4\pi\delta(\vec{r})$ ,  $E_3^{(1)} = \frac{\alpha^2 z^4}{2n^3}$  - для S состояния, для других = 0.

$$\hat{V}_1 = -\frac{\alpha^2}{2} \left(E + \frac{z}{4}\right)^2, \quad E_1^{(1)} = \frac{\alpha^2 z^2}{2n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l+1/2}\right),$$

$$\hat{V}_2 = \frac{\alpha^2 z}{4} \frac{1}{r^3} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2), \quad E_2^{(1)} = \frac{\alpha^2 z^4}{4n^3} \left[ \frac{J(J+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} \right] (1 - \delta_{l0}).$$

Суммарная поправка: (для S состояний  $E_2^{(1)} = 0$ ):  $E_{nj}^{(1)} = -\frac{\alpha^2 z^4}{2n^3} \left[ \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right]$  - тонкая структура спектра.

## Атомка-13. Системы тождественных частиц. Бозоны и фермионы. Принцип Паули.

Волновая функция системы  $N$  точечных частиц:  $\psi(q_1, \dots, q_n)$  где  $q_i$  - совокупность координат и проекций спина  $i$ -й частицы. При замене  $q_i \leftrightarrow q_j$  может вести себя:

- Симметрично:  $\psi(\dots, q_i, \dots, q_j, \dots) = (\dots, q_j, \dots, q_i, \dots)$  - БОЗОНЫ - тождественные частицы с целыми спинами.
- Антисимметрично:  $\psi(\dots, q_i, \dots, q_j, \dots) = -(\dots, q_j, \dots, q_i, \dots)$  - ФЕРМИОНЫ - тождественные частицы с полуцелым спином.

Пусть  $\psi_i(q)$  - полная одночастичная система ортонормированных собственных функций. Базисные ортонормированные функции системы  $N$  бозонов имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum \binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}^{-\frac{1}{2}} (n_1)(n_2) \dots (n_i) \dots = \\ &= \sum \left( \frac{N!}{\prod_{i=1}^{\infty} n_i!} \right)^{-\frac{1}{2}} (n_1)(n_2) \dots \end{aligned}$$

Число упорядоченных разбиений по бесконечному числу состояний, содержащих  $(n_1)(n_2) \dots$  частиц - это  $\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}^{-\frac{1}{2}}$

Для двух частиц:

$$\Phi(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(q_1)\psi_n(q_2) + \psi_n(q_1)\psi_m(q_2)), & m \neq n \\ \psi_n(q_1)\psi_n(q_2), & m = n \end{cases}$$

$N$  фермионов: слабовзаимодействующие частицы, следовательно антисимметричная функция стационарного состояния системы может быть записана в виде:  $\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det |\psi_{\alpha_i}(q_k)|$ , где  $\psi_{\alpha_i}(q_k)$  - одночастичная волновая функция ( $i$ -е состояния) частицы  $K$ . Из антисимметричности следует:  $\psi(q_1, \dots, q_i, q_i, \dots, q_N) = 0 \Rightarrow$  ПРИНЦИП ПАУЛИ: для того, чтобы волновые функции системы невзаимодействующих фермионов была отличная от 0, (т.е. состояния физические реализуемо) необходимо, чтобы в каждом состоянии находилось не более одной частицы. Для двух фермионов:  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_m(q_1)\psi_n(q_2) - \psi_m(q_2)\psi_n(q_1)]$ ,  $m \neq n$ . При  $m = n$   $\psi = 0$ .

# Атомка-14. Многоэлектронный атом. Приближение самосогласованного поля. Электронная конфигурация. Терм. Тонкая структура терма. Приближение $LS$ и $jj$ -связей. Правила Хунда.

1). Атом He ( $z = 2$ ).  $H = H_0 + \hat{V}(r_1, r_2)$  - с учетом взаимодействия электронов.  $H_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} - z\frac{e^2}{r_1} - z\frac{e^2}{r_2}$ ;  $\hat{V}(r_1, r_2) = \frac{e^2}{(r_1 - r_2)}$ ;  $E^{(1)} = \frac{5ze^2}{8a_0} \Rightarrow$  основное состояние, когда ( $z = a_0$ )

$$E = -z^2 \frac{e^2}{a_0} + \frac{5}{8} z \frac{e^2}{a_0}$$

подбор вариационным методом некоего эффективного потенциала.

2). *Приближение центрального самосогласованного поля.* Волновая функция системы взаимодействующих фермионов имеет вид:  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det |\varphi_i(\vec{r}_j, \sigma_i)|$  Выбирают орбитали (одночастичные волновые функции) в виде  $\varphi_i(\vec{r}_j) = R_{nl}(r_i)Y_{ln}(\theta_i, \varphi_i)$ , где  $n = n_r + l + 1$  - главное квантовое число.

3). *Электронная оболочка* - совокупность состояний, с заданными  $n$  и  $l$  ( $4l + 2$  состояний - заполненная оболочка) - содержит эквивалентные электроны. а). Заполнение электронных оболочек с  $\min(n + l)$ . б). Из них - сначала заполняются с  $\min(n)$  - выполняется для легких атомов ( $z < 40$ ), кроме хрома ( $z = 24$ ) и меди ( $z = 29$ ). В целом порядок заполнения такой:

	$(1s)^2$	$(2s)^2$	$(2p)^6$	$(3s)^2$	$(3p)^6$	$(4s)^2$	$(3d)^{10}$	$(4p)^6$	$(5s)^2$	...
$n + l$	1	2	3	3	4	4	5	5	5	...
$n$	1	2	2	3	3	4	3	4	5	...

Таблица Менделеева: каждый период (кроме первого) - начинается с  $ns$  и заканчивается  $np$  - оболочкой. Самосогласованное поле - центрально только для атомов **со всеми заполненными оболочками!**

4).  $\hat{L}$  и  $\hat{S}$  - являются интегралами движения - ими можно характеризовать состояние атома с заданной конфигурацией (вклад в  $L$  и  $S$  - дают только незаполненные оболочки). Состояние незаполненной оболочки - спектральные термы.  $2S + 1$  - мультиплетность терма.  $^{2s+1}L_J$  - обозначение терма.

Пример: конфигурация  $(np)^2$  - 2 электрона, 6 возможных одноэлектронных состояний ( $4l + 2$ ). Возможно 15 размещений (с учетом принципа Паули):  $s = \pm \frac{1}{2}$ ,  $m \in (-l, l) = -1, 0, +1$

$M = 2$	$M = 1$	$M = 0$		
$ 1 + 1 - \rangle$	$ 1 + 0 - \rangle$	$ 1 + \vec{1} - \rangle$	$ \vec{1} + 0 - \rangle$	$ \vec{1} + \vec{1} - \rangle$
	$ 1 + 0 + \rangle$	$ 1 + \vec{1} + \rangle$	$ \vec{1} + 0 + \rangle$	
	$ 1 - 0 + \rangle$	$ 1 - \vec{1} + \rangle$	$ \vec{1} - 0 + \rangle$	
	$ 1 - 0 - \rangle$	$ 1 - \vec{1} - \rangle$	$ \vec{1} - 0 - \rangle$	
		$ 0 + 0 - \rangle$		

и т.д., в итоге перебора всех возможных состояний получается:

- $^1D$  - спины противоположны, 5 состояний
- $^3P$  - спины сонаправлены, 9 состояний
- $^1S$  - 1 состояние

5. *Правило Хунда*: наименьшей энергией обладает терм с наибольшим  $S$ , среди термов с равным  $S$  - с наибольшим  $L$ .

6. *Спин-орбитальное взаимодействие*:  $\hat{V}_{ls} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \hat{l}_i \hat{s}_i$ . Можно рассматривать как малое возмущение, если его влияние мало по сравнению с нецентральностью. Среднее значение энергии  $E_{ls}$  для заданного термина: матричные элементы

$$\langle \hat{V}_{ls} \rangle = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \sum_i W(nl)_i \right) * a_i * b_i \langle LM'S\mu' | \hat{L}\hat{S} | LMS\mu \rangle$$

$2\hat{L}\hat{S} = \hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 \Rightarrow$  если незаполнена только одна электронная оболочка, то  $\langle \hat{V}_{ls} \rangle = \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m^2c^2} A [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$ , где  $A = \vec{W}(nl) (\sum a_i * b_i)$ ,  $W(nl) = \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} R_{nl}^2(r) * r^2 dr$  - радиальный интеграл взаимодействия, и  $\hat{l}_i = a_i \hat{L}$ ;  $\hat{s}_i = b_i \hat{S}$ . При учете  $\hat{V}_{ls}$  спектральный терм расщепляется на группу уровней. Расстояние между ними:  $\Delta E_{J,J-1} = A'J$  - правило интервалов Ланде. Уровни - образуют тонкую структуру атомных уровней.

Мы рассматривали случай постоянных  $L$  и  $S$ , и  $\hat{V}_{ls}$  - малой поправки. Пригодно, если  $\Delta E_{J,J-1} \ll \Delta E_{L,L-1}$  - интервалы тонкой структуры малы по сравнению с расстоянием между терминами. Приближение LS-связи  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i \vec{l}_i + \sum_j \vec{s}_j$

Если спин-орбитальное взаимодействие превышает энергию остаточного взаимодействия (что верно для очень крупных ядер), то в качестве волновых функций отдельных электронов берут общие волновые функции операторов  $\hat{J}_i^2$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{l}_i^2$ ,  $\hat{s}_i^2$ . В этом случае уровни с различными значениями  $J$  определяют как:  $\hat{J} = \sum_i \vec{\hat{j}}_i$

# Атомка-15. Нестационарная теория возмущений. Золотое правило Ферми.

*Нестационарная теория возмущений.*

Если  $\hat{H}$  зависит от времени явно: источник внешнего переменного поля, влияние которого мало:  $H(t) = H_0 + V(t)$ . Если  $\hat{V}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то используется полная система собственных функций  $\hat{H}_0$ , а  $\hat{V}(t)$  - по теории возмущений.

Дискретный спектр  $\hat{H}_0$ :  $\{\varphi_k\}$ . Тогда решение нестационарного уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{v}(t)]\psi$$

можно представить в виде разложения по СФ  $\hat{H}_0$

$$\psi = \sum_k a_k(t)\varphi_k(t), \quad i\hbar \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = \hat{H}_0 \varphi_k = E_k \varphi_k \Rightarrow i\hbar \frac{da_k}{dt} = \sum_k V_{nk}(t)a_k,$$

где матричный элемент  $V_{nk}(t) = V(t)e^{i\omega_{nk}t} = V(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_n - E_k)t\right)$ ;  $\omega_{nk} = \frac{1}{\hbar}|E_n - E_k|$ . Обозначим  $w_{mn} = |a_{mn}|^2$  - вероятность перехода из состояния  $\varphi_n$  в состояние  $\varphi_m$ .

При  $t = 0$   $a_{kn} = \delta_{kn}$ ,  $w_{nk} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{kn} e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2$  - применимо, если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{V}(t) = 0$ , иначе  $w_{nk} = \frac{1}{\hbar^2 \omega_{nk}^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V_{kn}}{\partial t} e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2$ . Внезапное включение поля  $\frac{\partial V_{kn}}{\partial t} = V_{kn} \delta(t)$ , тогда  $w_{nk} = \frac{|V_{kn}|^2}{\hbar^2 \omega_{kn}^2}$ .

*Периодическое возмущение*  $\hat{V}(t) = \hat{V}_0 \cos \omega t$ . Обозначая  $S = \omega + \omega_{kn}$ ,  $R = \omega - \omega_{kn}$  получим

$$W_{nk} = \frac{|V_{nk}|^2}{2\hbar^2} \times \left\{ \frac{1 - \cos(Rt)}{R^2} + \frac{1 - \cos(St)}{S^2} + \frac{1 + \cos(2\omega_{kn}t) - \cos(Rt) - \cos(St)}{RS} \right\}$$

Если  $\omega$  близка к собственной частоте  $\omega_{nk}$ , то  $R \ll S$ , и  $w_{nk} \approx \frac{|V_{nk}|^2}{2\hbar^2} \frac{1 - \cos Rt}{R^2}$ ; в случае точного резонанса ( $R = 0$ )  $w_{nk} = \frac{|V_{nk}|^2}{2\hbar^2} t^2$  - наиболее вероятными будут переходы между состояниями  $\varphi_n$  и  $\varphi_m$ .

Если при гармоническом воздействии на систему значение энергии  $E_+ = E_0 \hbar \omega$  попадает в область непрерывного спектра, то переход в состояние  $E_+$  будет резонансным. Для вычисления  $w$  заменим непрерывный



спектр конечных состояний дискретным квазинепрерывным: наложим на ВФ непрерывного спектра условие периодичности на границах куба с ребром  $L$  ( $L$  велико по сравнению с размерами системы). Тогда вероятность перехода из состояния  $\nu$  в состояние из области непрерывного спектра

$$w_{0\nu} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0\nu} e^{i\omega_0 t} dt \right|^2,$$

суммарная вероятность перехода (скорость распада начального состояния)

$$W = \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0\nu} e^{i\omega_0 t} dt \right|^2.$$

Число дискретных уровней  $N_{\nu}$  в интервале  $(E_{\nu}, E_{\nu} + \Delta E_{\nu})$  при  $L^3 \rightarrow \infty$  пропорционально  $\Delta E_{\nu}$ . Определим функцию плотности состояний  $\rho(\nu) = \frac{N_{\nu}}{\Delta E_{\nu}} \sim L^3$ . Тогда при  $L \rightarrow \infty$

$$W = \frac{1}{\hbar^2} \int dE_{\nu} \rho(\nu) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0\nu} e^{i\omega_0 t} dt \right|^2.$$

Пусть на систему в течении достаточно длительного времени  $T$  действует возмущение  $\hat{V}(t) = \hat{V} e^{-i\omega t}$ . Тогда

$$W = \rho(E_+) |v_{0+}|^2 \frac{2\pi}{\hbar} T - \text{золотое правило Фреми}$$

Вероятность перехода в состояние с непрерывным спектром под воздействием гармонического возмущения пропорциональна времени действия этого возмущения.

## Атомка-16. Вторичное квантование свободного электромагнитного поля. Взаимодействие атома с квантованным излучением.

Зачем это нужно: в системе свободных частиц импульсы частиц сохраняются по отдельности, вместе с ними сохраняются и числа заполнения. Если же частицы взаимодействуют друг с другом - тогда отдельные импульсы уже не сохраняются, также не сохраняются и числа заполнения. В таком случае уместно строить математический аппарат, в котором не координаты частиц, а числа заполнения играют роль независимых переменных. Для начала бозе-частицы (спин целый, в.ф. симметрична). Введём симметричный оператор

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_a \hat{f}_{(a)}^{(1)},$$

где каждое слагаемое - оператор, относящийся только к одной  $a$ -й частице - т.е. оператор будет действовать только на функции, содержащие переменную  $\xi_a$ . В общем случае  $N$ -частичная волновая функция записывается в виде определителя

$$\psi_{N_1 N_2 \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{p_1}(\xi_1) & \psi_{p_1}(\xi_2) & \dots & \psi_{p_1}(\xi_N) \\ \psi_{p_2}(\xi_1) & \psi_{p_2}(\xi_2) & \dots & \psi_{p_2}(\xi_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{p_N}(\xi_1) & \psi_{p_N}(\xi_2) & \dots & \psi_{p_N}(\xi_N) \end{vmatrix}$$

Действие оператора:

$$\langle N_i N_{k-1} | \hat{F}^{(1)} | N_{i-1} N_k \rangle = f_{ik}^{(1)} \times \sqrt{N_i N_k}$$

$$f_{ik}^{(1)} = \int \varphi_i^*(\xi) \hat{f}^{(1)} \varphi_k(\xi) d\xi$$

$$\overline{F^{(1)}} = \sum_i f_{ii}^{(1)} N_i$$

Введём операторы уничтожения и рождения и запишем их свойства:

$$\hat{a}_i |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle = \sqrt{N_i} |N_1, \dots, N_i - 1, \dots\rangle$$

$$\hat{a}_i^+ |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle = \sqrt{N_i + 1} |N_1, \dots, N_i + 1, \dots\rangle$$

$$\hat{a}_i^+ \hat{a}_i = N_i;$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^+ = N_i + 1;$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^+] = 1$$

И в терминах этих операторов, введённый выше оператор  $F^{(1)}$  запишется:

$$\widehat{F}^{(1)} = \sum_{i,k} f_{i,k}^{(1)} \times \widehat{a}_i^+ \widehat{a}_k$$

например, для гамильтониана:

$$\widehat{H}^{(1)} = \sum_{i,k} H_{i,k}^{(1)} \times \widehat{a}_i^+ \widehat{a}_k$$

В случае ферми частиц всё более криво:

$$\langle 1_i 0_k | \widehat{F}^{(1)} | 0_i 1_k \rangle = f_{ik}^{(1)} \times (-1)^{\sum (i+1, k-1)},$$

где  $\sum (i+1, k-1)$  - суммв сех чисел заполнения от  $i+1$  до  $k-1$ . Опер-ры рожд. и уничтож. и их свойства:

$$\langle 0_i | a_i | 1_i \rangle = \langle 1_i | a_i^+ | 0_i \rangle = (-1)^{\sum (1, i-1)}$$

$$\langle 1_i 0_k | \widehat{a}_i^+ \widehat{a}_k | 0_i 1_k \rangle = (-1)^{\sum (i+1, k-1)}$$

$$\widehat{a}_i^+ \widehat{a}_i = N_i; N_i \in 0, 1$$

$$\widehat{a}_i \widehat{a}_k^+ + \widehat{a}_k^+ \widehat{a}_i = \delta_{ik}$$

Взаимодействие атомов с излучением: Уравн-е и реш-е для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  с учётом калибр-ки Лоренца:  $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$

$$\langle 0_i | a_i | 1_i \rangle = \langle 1_i | a_i^+ | 0_i \rangle = (-1)^{\sum (1, i-1)}$$

$$\langle 1_i 0_k | \widehat{a}_i^+ \widehat{a}_k | 0_i 1_k \rangle = (-1)^{\sum (i+1, k-1)}$$

$$\widehat{a}_i^+ \widehat{a}_i = N_i; N_i \in 0, 1$$

$$\widehat{a}_i \widehat{a}_k^+ + \widehat{a}_k^+ \widehat{a}_i = \delta_{ik}$$

введём ещё 2 вектора поляризации  $\varepsilon_{k\lambda}$  и разложим исходный вектор-потенциал:

$$\sum_{\lambda \in 1,2} (\varepsilon_{k\lambda})_i (\varepsilon_{k\lambda}^*)_j = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2; \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_{k\lambda} = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k C_k \sum_{\lambda} [\widehat{a}_{k\lambda}(t) \varepsilon_{k\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \widehat{a}_{k\lambda}^*(t) \varepsilon_{k\lambda}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

$$C_k = \sqrt{2\pi \hbar c^2 / \omega_k V}, V - \text{объём!!!}$$

Напряжённость электрического поля тоже выражается через это разложение:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \vec{E}_k = \frac{i\omega_k}{c} \vec{A}_k$$

$$A_k(t) = C_k \sum_{\lambda} a_{k\lambda}(t) \varepsilon_{k\lambda}$$

Введённые коэффициенты  $a_{k\lambda}$ ,  $a_{k\lambda}^*$  будут теми самыми операторами уничтож и рожд. Отметим, что при испускании фотона и переходе  $\varphi_i \rightarrow \varphi_f$  выполнено:

$$\langle n_{k\lambda} + 1, t | \hat{A}(\vec{r}, t) | n_{k\lambda}, t \rangle = A_{fi}(\vec{r}) e^{+i\omega_k t}$$

$$A_{fi}(\vec{r}) = \sqrt{n_{k\lambda} + 1} C_k \varepsilon_{k\lambda}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Теперь: взаимодействие атома с излучением (испускание фотона и переход  $\varphi_i \rightarrow \varphi_f$ ) рассматриваем как возмущение, причём пренебрегаем зависимостью вектор-потенциала от расстояния (берём его в нуле)

$$\hat{V} = -\frac{e}{mc} \hat{A}(\vec{r}) \hat{p}$$

$$kr \sim \frac{\omega a_{bor}}{c} \sim \frac{v_{атома}}{c} \ll 1$$

$$\hat{A}(\vec{r}) \approx \hat{A}(0)$$

$$\vec{p}_{fi} = m \dot{\vec{r}}_{fi} = m \frac{i}{\hbar} \langle \varphi_f | \hat{H} r - r \hat{H} | \varphi_i \rangle = -i\omega r_{fi}$$

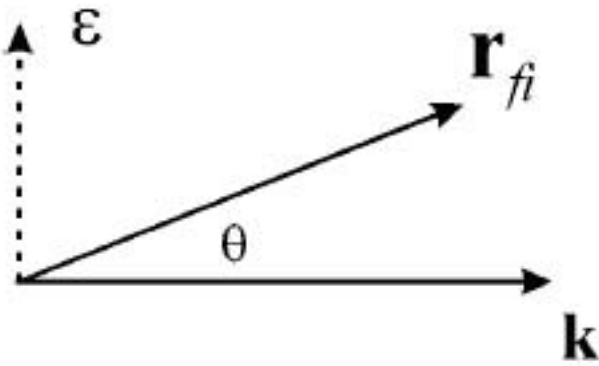
$$\hat{V} = -er \hat{E}(0), \hat{E} - \text{оператор напряжённости поля}$$

Тогда вероятность атомом испустить фотон  $\hbar\omega$ :

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(\hbar\omega + E_f - E_i) \frac{V d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$:$$

$$dw_{k\lambda} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |er_{fi}\varepsilon_{k\lambda}^*|^2 (n_{k\lambda} + 1) d\Omega$$



Объём сократился! Смысл множителя  $(n_{k\lambda} + 1)$  таков: первое слагаемое описывает индуцированное излучение фотонов ( $n_{k\lambda}$  - это число квантов в падающей волне), а единица описывает спонтанное излучение фотона (есть даже в отсутствии поля!!!) Работает лишь та поляризация, которая лежит в той же плоскости, что и  $k$  и  $r_{fi}$ . Примечание: 2 вектора поляризации соответствуют поперечности электромагнитных волн.

Ещё одна тема: Преподаватель может спросить: если вы говорите о электромагнитном поле, то почему вы от интегрирования векторного потенциала перешли к суммированию (см выше, первые формулы для вектор-потенциала), ведь поле - это бесконечный набор осцилляторов с непрерывным спектром?? На это ему надо бодро отвечать: конечно, но для большей наглядности мы мысленно переходим от непрерывного к дискретному спектру - рассмотрим поле в конечном объёме  $V$  и зададим условие периодичности поля на границах объёма. При этом, компоненты волнового вектора становятся дискретными, можно заменить интегрирование суммированием. В конечном ответе объём сокращается, как и должно быть.

# Атомка-17. Теория упругого рассеяния. Борновское приближение. Парциальное разложение амплитуды рассеяния.

*Рассеяние частиц* при столкновении можно рассматривать как квантовый переход в состояниях непрерывного спектра из начального состояния с импульсом  $\vec{p}_a = \hbar\vec{k}_a$  в конечное состояние  $\vec{p}_b = \hbar\vec{k}_b$  под воздействием оператора возмущения  $\hat{V}$ , определяющего энергию взаимодействия частиц.

*Упругое рассеяние* - равенство относительных скоростей частиц до и после столкновения  $v_a = v_b$ .

*Задача рассеяния:* задача отыскания волновых функций рассеяния - функций вида  $\psi_k(t, \theta, \varphi) = e^{ikz} + f(\theta)e^{i\vec{k}\vec{r}}$  - суперпозиция волновых функций падающей и рассеянной частицы,  $f(\theta)$  - амплитуда рассеяния.

*Борновское приближение:*  $f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_a | \hat{V} | \varphi_b \rangle$ . Если энергию возмущения  $V(\vec{r})$  рассматривать как малое возмущение ( $|V| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ , где  $a$  - это характерная длина потенциала-возмущения), то методом последовательных приближений получаем

$$\psi_k(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} V(\vec{r}) \psi(\vec{k}, \vec{r}) d\vec{r} + \dots,$$

и амплитуда рассеяния запишется в виде ряда

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_b | \hat{V} | \psi_a \rangle + \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \iint \varphi_b^*(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}) V(\vec{r}') d^3r d^3r' + \dots$$

Если ряд сходится, то его первые  $N$  членов дают  $N$ -е борновское приближение.

*Дифференциальное сечение упругого рассеяния* (отношение числа рассеянных в  $d\Omega$  частиц к плотности потока падающих частиц)

$$d\sigma = \frac{k}{k_a} |f(\theta)|^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

( $k = k_a$  для упругого рассеяния)

В 1м борновском приближении

$$d\sigma^{(6)} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left| \langle \psi_b | \hat{V} | \varphi_a \rangle \right|^2 d\Omega.$$

В случае *центрального поля*

$$f^{(6)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r \frac{\sin(\vec{q}\vec{r})}{\vec{r}} V(r) dr,$$

где  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$  - изменение импульса при рассеянии,  $|q| = 2k \sin(\theta/2)$ .

Пусть  $\tau = ka$ , где  $a$  - характерная длина (расстояние действия) потенциала. Тогда для *медленных частиц* ( $\tau \lesssim 1$ )

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) dr$$

Для *быстрых частиц* ( $\tau \gg 1$ ) главный вклад в  $f(\theta)$  даёт *область малых значений углов* ( $\theta \lesssim 1/\tau$ ), т.е. быстрые частицы рассеиваются в основном вперёд, т.к. интеграл отличен от нуля только в области максимума функции Бесселя.

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} r^2 j_0(|q| |r|) U(r) dr,$$

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \text{сферическая ф-ция Бесселя}$$

*Парциальное разложение амплитуды рассеяния:* Пусть потенциал обладает сферической симметрией - тогда сохраняется момент импульса - тогда падающую волну можно рассматривать как суперпозицию *парциальных волн* (с разным моментом импульса):  $\varphi_a(r) = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l + 1) P_l(\cos(\theta)) j_l(kr)$ . При  $kr \gg 1$  (на больших расстояниях от центра)

$$\varphi_a(r) = (kr)^{-1} \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) i^l P_l(\cos \theta)}_{\text{сумма парц. волн}} \frac{i}{2} \times$$

$$\times \left\{ \underbrace{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)\right)}_{\text{сход. сфер. волны}} - \underbrace{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)\right)}_{\text{расх. сфер. волны}} \right\}$$

Уравнение рассеяния частиц в центрально-симметричном поле

$$\psi(\vec{r}) = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_l(r) P_l(\cos \theta) = \varphi_a(r) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

где  $R_l(r)$  - радиальная функция,  $P_l(\cos(\theta)) = \sqrt{\frac{\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta)$ .

Отсюда парциальное разложение амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - S_l) P_l(\cos \theta)$$

где  $S_l = \exp(2i\delta_l)$  - диагональные матричные элементы матрицы рассеяния,  $\delta_l$  - фазовый сдвиг.



# Атомка-18. Основы физики молекул. Адиабатическое приближение. Термы двухатомной молекулы. Типы химической связи.

Гамильтониан для молекулы:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N \frac{e^2}{r_{ij}} + \sum_{\alpha < \beta=1}^{\mu} \frac{Z_{\alpha} Z_{\beta} e^2}{R_{\alpha\beta}} - \sum_{i, \alpha=1}^{\mu, N} \frac{Z_{\alpha} e^2}{|\vec{r}_i - \vec{R}_{\alpha}|}$$

Адиабатическое приближение: т.к. масса ядер много больше массы электронов, то считаем, что ядра покоятся, все их координаты/заряды - это параметры. Приближение самосогласованного поля: каждый электрон движется в усреднённом поле других электронов. Эти два приближения позволяют нам существенно упростить гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \hat{H}^{(0)}(\vec{r}_i) + \sum_i \left( \frac{e^2}{r_{ij}} \right)_{\text{среднее по } j}$$

Метод молекулярных орбит: Будем искать решение одночастичных задач в виде:

$$\hat{H}(\vec{r}_i) \Psi(\vec{r}_i) = \varepsilon_i \Psi(\vec{r}_i)$$

$$E = \sum_{i=1}^N g_i \varepsilon_i$$

$$\Psi(\vec{r}_i) = \sum_k C_k \varphi_k(\vec{r}_i)$$

где  $\Psi$  - молекулярные орбитали;  $\varphi$  - атомные орбитали (водородоподобные функции);  $g_i$  - числа заполнения. Уравнение на коэффициенты  $C_k$ :

$$\sum_i C_i (H_{ji} - S_{ji} \varepsilon) = 0$$

$$H_{ji} = \int \varphi_j^* \hat{H} \varphi_i dV$$

$$S_{ji} = \int \varphi_j^* \varphi_i dV$$

$H_{ii}$  - кулоновские интегралы,  $H_{ij}$  - резонансные интегралы,  $S_{ij}$  - интегралы перекрывания.

Теперь можно придумывать разные методы/приближения для того, чтобы получить все эти интегралы. Например, в методе молекулярных орбит:  $H_{ii} = \alpha = \text{const}$ ,  $H_{ij} = \beta = \text{const}$  (для соседних электронов, иначе - ноль),  $S_{ij} = \delta_{ij}$  (т.е. пренебрежение перекрыванием). Решая систему получаем набор молекулярных энергий  $\{\varepsilon_i\}$ , а также соответствующий каждому значению  $\varepsilon_i$  набор  $\{c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, \dots\}$  - коэффициенты вхождения атомных орбиталей в молекулярную орбиталь.

Хартри-Фок. Если данный вопрос будет принимать Кукушкин, то почти наверняка он будет спрашивать про уравнения Хартри-Фока. Пара слов про них:

1) Предполагаем, что полная волновая функция, это:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{vmatrix}$$

где каждая  $\psi_i(j)$  - это молекулярная спин - орбиталь (произведение пространственной части  $i$ -й молекулярной орбитали, на которой находится  $j$ -й электрон, на спиновую).

2)  $\psi_i$  нормированы:

$$\int \Psi_i^*(1) \Psi_j(1) d\tau_1 = \delta_{ij}$$

3) печально известные уравнения ХФ получаются подстановкой  $\Phi$  в УШ:

$$\hat{H}^{(0)}(1)\psi_i(1) + \sum \left[ \int \psi_j^*(2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi_j(2) d\tau_2 \psi_i(1) - \int \varphi_j^*(2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi_i(2) d\tau_2 \psi_j(1) \right] = \varepsilon_0 \psi_i$$

4) первое слагаемое - кин. энерг. и взаимодействие э-на с ядерным окружением.

$$\hat{H}^{(0)}(1) = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} - \sum_{\alpha=1}^{\mu} \frac{Z_{1\alpha} e^2}{r_{1\alpha}}$$

5) второе слагаемое - взаимодействие первого электрона на  $i$ -й орбитали с зарядовой плотностью (её формируют все электроны молекулы, в т.ч. и он сам!):

$$\rho_{кул}(2) = \sum_{j=1}^N \psi_j^*(2)\psi_j(2)$$

6) третье слагаемое - взаимодействие электрона на  $i$ -й орбитали с зарядовой плотностью:

$$\rho_{обм}(1,2) = \frac{\sum_{j=1}^N \psi_i^*(1)\psi_j^*(2)\psi_j(1)\psi_i(2)}{\psi_i^*(1)\psi_i(1)}$$

Третий член не равен 0 тогда, когда электроны на  $i$ -й и  $j$ -й молекулярных орбиталях имеют одинаковую проекцию спина. Третье слагаемое, стало быть, тоже содержит взаимодействие электрона на  $i$ -й орбитали самого с собой, значит это взаимодействие элиминируется (ведь второе слагаемое содержит такой же член).

Молекулярные термы:  $2^{S+1}\{X\}$ , где  $X = LS, P, D, F, G$ .

Виды химической связи: 1) ковалентная - хим. связь, между атомами, осуществляемая обобщёнными электронами (например HCl).

2) ионная связь - в процессе химической реакции образуются ионы, дальнейшая связь - это из электростатическое взаимодействие. Т.е. электроны полностью переходят от одного элемента - другому. Чтобы возникла ионная связь - должно быть большое различие в электроотрицательности электронов (напр NaCl).

3) металлическая связь - проявляется в кристаллах металлов. Решётка из положительных ионов удерживается распределённым электронным газом.

# Ядро-1. Основные характеристики атомных ядер.

## Квантовые характеристики ядерных состояний

Общее число нуклонов в ядре называется массовым числом  $A$ , число протонов в ядре равно заряду ядра  $Z$ , число нейтронов  $N = A - Z$ . Ядра с одинаковыми зарядами  $Z$  и разным числом нейтронов называются - изотопами. Ядра с разными  $Z$  и одинаковыми  $N$  - изотопами, ядра с разными  $Z$  и одинаковыми  $N$  - изобарами.

Ядро при энергиях ниже порога распада (с испусканием нуклона, альфа частицы и т.п.) может находиться только в дискретных состояниях с определенной энергией, характеризующихся набором квантовых чисел, задающих значения сохраняющихся величин (интегралов движения) в этих состояниях. Выше порога распада ядра дискретные состояния становятся нестационарными и проявляются в ядерных реакциях как резонансы конечной ширины.

Наиболее важными характеристиками ядерных состояний являются спин ядра (или момент кол-ва движения, называемый также угловым моментом ядра)  $I$  и четность  $\pi = \pm 1$ . Спин  $I$  измеряется в единицах  $\hbar$  и принимает полуцелые значения у нечетных ядер и целочисленные значения у четных ядер. Четность указывает на симметрию волновой функции  $\psi$  ядерного состояния относительно зеркального отражения пространства  $\hat{P}\psi = \pi\psi$ . В связи с этим для ядерных состояний указывают объединенную характеристику  $I^\pi$ . Эмпирически установлено, что основное состояние четно-четных ядер имеет характеристику  $0^+$ . Спины и четность нечетных ядер, как правило, объясняются моделью оболочек. Строго говоря, четность не является точным квантовым числом, поскольку она не сохраняется при слабом взаимодействии. За счет сил электрослабого взаимодействия между нуклонами происходит смешивание состояний с одним и тем же спином и противоположными четностями. Однако вследствие малости сил, нарушающих четность, указанное смешивание мало и им можно пренебречь при рассмотрении спектров ядерных уровней, разнообразных ядерных реакций и переходов, за исключением процессов, направленных специально на изучение явления не сохранения четности в ядрах.

Еще одной важной, хотя и приближенной ядерной характеристикой является изотопический спин (или изобарический спин)  $T$ , который складывается из изоспинов отдельных нуклонов по тем же правилам, что и обычный спин. Сохранение этой величины связано с изотопической ин-

вариантностью ядерных сил, которая состоит в том, что ядерные взаимодействия между двумя нуклонами в одинаковых пространствах и спиновых состояниях не зависят от сорта нуклонов, т.е. одинаковы в парах  $pp$ ,  $pn$  и  $nn$ . Изотопический спин (изоспин) может принимать значения  $T_z \geq (A - 2Z)/2$ . Она связана с зарядом ядра и поэтому является строго сохраняющейся величиной во всех ядерных состояниях. В отличие от этого изоспин  $T$  является приближенным квантовым числом. Нарушение изоспина обусловлено различием масс протона и нейтрона, а также кулоновским взаимодействием между протонами. При  $Z \leq 20$  эти эффекты малы и изоспин  $T$  является достаточно точным квантовым числом. В результате ядерные состояния можно характеризовать квантовыми числами  $T$  и  $T_z$ , а состояние с одинаковыми значениями  $I^\pi, T$  в соседних ядрах-изобарах объединить в изотопические мультиплеты. Поскольку проекция изоспина принимает значения  $T_z = -T, \dots, T$  то в изотопическом мультиплет входит  $2T + 1$  уровней.

Опытным путем установлено, что энергия возбуждения ядерного состояния тем выше, чем больше изоспин. Поэтому в основном состоянии ядра  $T_z = T$  и у четно-четных ядер с  $Z = N$   $T = 0$ . Ядра с  $T = 1/2$  и  $T_z = \pm 1/2$  образуют изодублет. (напр.  ${}^3H - {}^3He$ ). Примером изотриплета могут служить основное состояние  $0^+$  ( $T = 1, T_z = 1$ ) ядра  ${}^6He$ . В ядерной физике принято приписывать нуклону изоспин  $T = 1/2$  и значение  $T_z = -1/2$  нейтрону,  $T_z = +1/2$  протону, в отличие от физики элементарных частиц, где не используют противоположные знаки проекций изоспина нуклона. Это сделано из соображений удобства, чтобы значения  $T_z$  были положительны для стабильных ядер, у которых  $N > Z$ .

## Ядро-2. Радиоактивность.

*Радиоактивность* - способность ядер самопроизвольно распадаться, испуская частицы. Радиоактивный распад-статистич процесс. Любое радиоактивное ядро м. распастся в любое время и закономерности наблюдаются в среднем. При ядерных превращениях или распадах происходят переходы между различными стационарными состояниями ядер. Ядро в возбужденном состоянии имеет среднее время жизни  $\tau$ . Всякое возбуждение описывается волновой функцией, которая убывает со временем по закону  $|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ .  $\tau$ ,  $t_{1/2}$  - периода полураспада,  $\lambda = 1/\tau$  - константы распада. Её смысл - вероятность распада ядра в единицу времени  $w \equiv \lambda$ .  $t_{1/2} = \ln_2 \tau$  - это время, за которое половина ядер испытывает распад. Ядро может самопроизвольно переходить в более низкое состояние (при этом испускается  $\gamma$ -квант) или распадаться на различные конечные продукты. Необходимое условие такого превращения  $M \geq \sum m_i$ , где  $m_i$  - масса  $i$ -го конечного продукта. Энергия распада  $Q$ :  $Q = \left( M - \sum_i m_i \right) c^2$ . Виды распада:

- $\alpha$  - распад (испускание ядер  ${}^4_2\text{He}$ );
- $\beta$  - распад ( $e^\pm$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ );
- $\gamma$  - распад;
- спонтанное деление;
- испускание нуклонов (1-го протона или нейтрона, 2-х протонов);
- испускание кластеров (ядер от  ${}^{12}\text{C}$  до  ${}^{32}\text{S}$ ).

Области ядер с различным типом распада удобно показать на NZ-диаграмме. Отклонение от области стабильности в сторону  $B_n = 0$  (нейтронно-избыточные ядра) приводит к  $\beta^-$ -распаду ( $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ ). Движение к линии  $B_p = 0$  (протонно-избыточные ядра) ведет к  $\beta^+$ -распаду ( $p \rightarrow ne^+ \nu_e$ ) или  $e$ -захвату ( $pe^- \rightarrow n\nu_e$ ). Движение в сторону тяжелых ядер вдоль линии стабильности ведет к  $\alpha$ -распаду и спонтанному делению. Между линиями  $B_n = 0$  и  $B_p = 0$  находится 5000-6000 ядер, живущих больше характерного  $\tau_\alpha$  ( $10^{-21}$  -  $10^{-23}$  сек), которое можно определить

как время пролета испускаемой частицы через ядро. Для релятивистской частицы

$$\tau_{я} = \frac{2R_{я}}{c} \approx \frac{(0.6 - 1.5) \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 10^{10}} \approx 10^{-22} - 10^{-23} \text{ сек.}$$

2.  $\alpha$ -радиоактивность. (При  $Z > 60$  появляются нуклиды, нестабильные к  $\alpha$ -распаду). Условие  $\alpha$ -распада  $M(A, Z) > M(A - 4, Z - 2) + M(4, 2)$ ,  $M(4, 2) = m_{\alpha}$ . Энергия  $\alpha$ -распада  $Q = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - m_{\alpha}]c^2$ . Энергии  $\alpha$ -частиц заключены в основном в интервале 2-9 МэВ, а периоды полураспада в интервале от  $3 \cdot 10^{-7}$  сек ( ${}_{84}^{212}\text{Po}$ ) до  $2.4 \cdot 10^{15}$  лет ( ${}_{60}^{144}\text{Nd}$ ).

Вероятность  $\alpha$ -распада равна произведению двух вероятностей - вероятности образования  $\alpha$ -частицы внутри ядра и вероятности покинуть ядро. Первый процесс - ядерный - сложно рассчитать. Второй процесс легко рассчитывается. Как будет видно из дальнейшего именно он, в основном, определяет время  $\alpha$ -распада. Пусть внутри ядра двигается «готовая»  $\alpha$ -частица со скоростью  $v$ . В единицу времени она  $\nu = \frac{v}{2R}$  раз окажется на поверхности ядра и может в каждый из этих моментов покинуть его с вероятностью  $P$ . Вероятность  $\alpha$ -частице покинуть ядро в единицу времени  $w = \frac{v}{2R}P$ . Стационарное уравнение Шредингера для  $\alpha$ -частицы в центральном потенциале  $V(r)$

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \left[ \hat{T}_{\alpha} + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E_{\alpha}\psi(\vec{r}),$$

где  $\hat{T}_{\alpha} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}}\Delta$ ,  $\mu = \frac{m_{\alpha}M}{m_{\alpha}+M} \approx m_{\alpha}$ ,  $T = \frac{\mu v^2}{2}$ . Для определения вероятности

проникновения через барьер произвольной формы,  $P = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_0} \sqrt{2\mu[V(r)-T]} dr}$ .

Для кулоновского барьера можно выполнить точное интегрирование и получить период полураспада  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{w} = \frac{0.693}{\nu P}$ . Это впервые сделал Гамов в 1928 г. еще до того как был открыт нейтрон (Гамов полагал, что ядро состоит из  $\alpha$ -частиц). При этом получается следующая приближенная формула  $\lg t_{1/2}(c) = \frac{A}{\sqrt{T(\text{МэВ})}} - B$ , где  $A \approx 150$ , а  $B \approx 55$ . Из этой формулы,

в частности, следует, что при увеличении  $T_{\alpha}$  от 4 до 9 МэВ,  $t_{1/2}$  падает с  $10^{20}$  до  $10^{-5}$  сек. Падение  $t_{1/2}$ , вызвано тем, что кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы входит в показатель экспоненты выражения для проницаемости барьера.

$\beta$ -распад это самопроизвольное испускание лептонов ( $e^{\pm}$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ). Слабое взаимодействие.

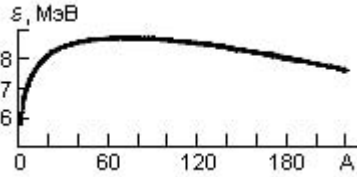
- $\beta^-$  ( $n \rightarrow pe^- \nu_e$ ),  $M(A, Z) > M(A, Z + 1) + m_e$ ,
- $\beta^+$  ( $p \rightarrow ne^+ \nu_e$ ),  $M(A, Z) > M(A, Z - 1) + m_e$ ,
- $e$ -захват ( $pe^- \rightarrow n\nu_e$ ),  $M(A, Z) + m_e > M(A, Z - 1)$ .

Времена  $\beta$ -распада лежат в интервале  $t_{1/2}(\beta) = 0.1 \text{ сек} - 10^{17} \text{ лет}$ .  $\alpha$ -распад, за который ответственны ядерные силы, может происходить за времена существенно более короткие (до  $3 \cdot 10^{-7}$  сек). На малую интенсивность слабых взаимодействий указывает и большое время жизни нейтрона ( $\approx 15 \text{ мин}$ ).  $\gamma$ -распад со сравнимой энергией выделения (0.78 МэВ) идет в среднем за  $10^{-12}$  сек. Энергия  $\beta$ -распада  $Q_{\beta\pm} = [M(A, Z) - M(A, Z \mp 1) - m_e]c^2$ ,  $Q_e = [M(A, Z) - M(A, Z - 1) + m_e]c^2$ . Чётность в слабых вз-ях не сохр-ся. Закон сохр-я лептонного заряда.



### Ядро-3. Деление и синтез ядер. Ядерная энергия. Реакторы

*Деление и синтез ядер.* Энергия связи, отнесенная к массовому числу  $A$ , называется удельной энергией связи нуклона в ядре, или энергией связи, рассчитанной на нуклон  $\mathcal{E} = \frac{\Delta W}{A}$



Для тяжёлых ядер, относящихся к правой части кривой  $\mathcal{E}(A)$ , энергетически выгоден процесс деления на два примерно одинаковых по массе ядра:  $(A_1, Z_1)$  и  $(A_2, Z_2)$  - осколки деления.

Для лёгких ядер, относящихся к левой части кривой  $\mathcal{E}(A)$ , энергетически выгоден процесс слияния (синтеза) в одно более тяжёлое ядро ( $A = A_1 + A_2, Z = Z_1 + Z_2$ ).

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - \varepsilon A,$$

$$M_1 = Z_1m_p + (A_1 - Z_1)m_n - \varepsilon A_1,$$

$$M_2 = Z_2m_p + (A_2 - Z_2)m_n - \varepsilon A_2.$$

Случай деления ядер получим следующую величину освобождённой энергии

$$Q_{дел} = (M - M_1 - M_2)c^2 = \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 - \varepsilon A = A(\bar{\varepsilon} - \varepsilon), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

$\bar{\varepsilon} > \varepsilon$ , поэтому  $Q_{дел} > 0$ .

Случай синтеза лёгких ядер

$$Q_{синт} = (M_1 + M_2 - M)c^2 = A(\varepsilon - \bar{\varepsilon})$$

$\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ , поэтому  $Q_{синт} > 0$ .

Энергия связи ядра  $\Delta W = [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2$ .

*Реакторы* То, что при делении ядра испускается от 2 до 5 нейтронов, открыло возможность осуществления цепной реакции деления. Если большинство нейтронов будет захватываться ядрами делящегося вещества, то

количество актов деления будет увеличиваться в 2-3 раза по сравнению с предыдущим, что приводит к взрывному возрастанию со временем выделяющейся энергии. Это происходит при взрыве атомной бомбы.

Скоростью цепной реакции деления большого количества ядер можно управлять, добиваясь сравнительно медленного и постоянного энерговыделения. Это осуществляется в ядерных реакторах.

*Термоядерный синтез* Синтез из лёгких ядер более тяжёлых:

- должен быть самоподдерживающимся
- плазма
- в термоядерном реакторе должно выделяться больше энергии, чем ее требуется для нагревания и удержания плазмы

## Ядро-4. Модели атомных ядер.

Некоторые очевидные, следующие из опыта, свойства ядерных сил:

1. силы работают на притяжение, компенсируя тем самым, кулоновское расталкивание
2. силы короткодействующие  $\sim 1$  фм
3. они очень большой величины
4. они обладают свойством насыщения (удельная энергия связи с ростом  $A$  (атомная масса) выходит на плато)

Модели ядра можно разбить на 2 класса - микроскопические модели (рассматривающие поведение отдельных нуклонов в ядре) и коллективные модели (рассматривающие согласованное движение больших групп нуклонов в ядре). Пример коллективной модели - модель жидкой капли, пример микроскопической - модель ядерных оболочек.

### 1. Модель жидкой капли

То, что плотность ядерного вещества ( $\rho \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$ ) говорит о его несжимаемости. Это сближает ядерное вещество с жидкостью. Также аналогия в постоянстве удельной энергии связи  $\varepsilon = \Delta W/A$  и хим. силы, связывающей молекулы жидкости.

Ядро - шарообразная капля несжимаемой заряженной сверхплотной ядерной жидкости.

Формула Ваццеккера

$$W(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta A^{-3/4},$$

где

- $a_v A$  - объёмная энергия,  $a_v > 0$ , растёт с увеличением числа нуклонов
- $a_s A^{2/3}$  - поверхностная энергия,  $a_s > 0$ , нуклоны на поверхности связаны слабее
- $a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$  - кулоновская энергия

- $a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{a}$  - энергия симметрии, учитывает стремление ядра иметь в основном состоянии сферически-симметричное расположение нейтронов и протонов
- $\delta A^{-3/4}$  - энергия спаривания, возникает в ядре в основном состоянии между нуклонами одного типа, находящимися на одном энергетическом уровне
- $a_v = 15.6 \text{ МэВ}$
- $a_s = 17.2 \text{ МэВ}$
- $a_c = 0.72 \text{ МэВ}$
- $a_{sym} = 23.6 \text{ МэВ}$
- $|\delta| = 34 \text{ МэВ}$

$$\delta = \begin{cases} +|\delta| & \text{для чётно-чётных ядер (число протонов и нейтронов чётно)} \\ 0 & \text{для нечётных ядер (число протонов или нейтронов нечётно)} \\ -|\delta| & \text{для нечётно-нечётных ядер (число протонов и число нейтронов нечётно)} \end{cases}$$

2. *Модель независимых частиц (ядерный ферми-газ)* - рассматривается движение не взаимодействующих между собой нуклонов в усреднённой потенциальной яме с радиусом  $R = r_0 A^{1/3}$  и глубиной  $U_0$ .

$$N = \int_0^{P_{\max}} \frac{dN}{dp} dp; \quad \frac{dN}{dp} = 2 \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3},$$

$P$  - импульс. Модель пригодна для описания эффектов симметрии и насыщения, а также для распределения внутриядерных нуклонов по импульсам.

3. *Модель ядерных оболочек* - в поле сферического потенциала движутся не взаимодействующие между собой частицы-фермионы (нейтроны, протоны). Тогда можно решать одночастичные УШ и находить стационарные энергетические уровни. На энергетическом уровне хранится  $2(2l+1)$  (NB. множитель 2 из-за спина) нуклонов данного типа.

Магические числа - 2, 8, 20, 50, 82, ... - с этим числом протонов ИЛИ нейтронов ядро наиболее устойчиво.

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

Введение спин-орбитального взаимодействия существенно улучшает модель:  $V(r) = V_1(r) + V_2(r) \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}$  Теперь на энергетическом уровне хранится  $2j + 1$  нуклонов данного типа.

4. *Многочастичная модель ядерных оболочек* - учёт коллективного взаимодействия между нуклонами. 3 возможных возбуждения:

- электронные состояния, описываются одночастичной моделью ядерных оболочек.  $E \sim 1 \text{ eV}$
- колебательные состояния.  $E \sim 0.1 \text{ eV}$
- вращательные состояния  $E \sim 0.001 \text{ eV}$

Два последних состояния - коллективные возбуждения.

5. *Обобщённая модель ядра*. В этой модели учитывается влияние коллективного движения нуклонов на параметры среднего поля. Коллективное движение приводит к изменению формы ядра без изменения объёма и ориентации в пространстве. Сферическое ядро превращается в эллипсоид вращения, способный вращаться вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии. Модель даёт качественное объяснение изменению квадрупольного момента ядра, а также объясняет структуру первых возбужденных состояний

6. *Сверхтекучая модель*. Основа: выделение из остаточного взаимодействия нуклонов парных сил притяжения между нуклонами с одинаковой энергией и моментом и противоположными по знаку проекциями момента.

## Ядро-5. Гамма-излучение ядер. Эффект Мессбауэра.

$\gamma$ -излучение — это самопроизвольное испускание ядром  $\gamma$ -квантов. В результате испускания ядро переходит из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией. Может сразу в основное, а может в результате последовательного испускания нескольких  $\gamma$ -квантов (каскадом). Примерные границы периодов полураспада для  $\gamma$ -переходов от  $10^{-19}$  с до  $10^{10}$  лет. Энергии  $\gamma$ -переходов изменяются от нескольких кэВ до нескольких МэВ.

Излучение, уносящее момент количества движения  $J_\gamma = l = 1$  называют дипольным,  $J_\gamma = l = 2$  - квадрупольным,  $J_\gamma = l = 3$  - октупольным. Кроме того, излучение бывает электрическим или магнитным.

Законы сохранения момента количества движения (спина)  $J$  и четности  $P$  при  $\gamma$ -переходах в атомных ядрах требуют выполнения следующих соотношений:

$$\vec{J}_f = \vec{J}_i + \vec{J}_\gamma, \text{ или } |J_i - J_f| \leq J_\gamma \leq J_i + J_f$$

$$P_f = P_i P_\gamma \text{ или } P_\gamma = P_i P_f$$

$J_\gamma = L_\gamma + S_\gamma$ ,  $\vec{S}_\gamma = \left( \vec{J}_\gamma \right)_{min} = 1$  - спин фотона.

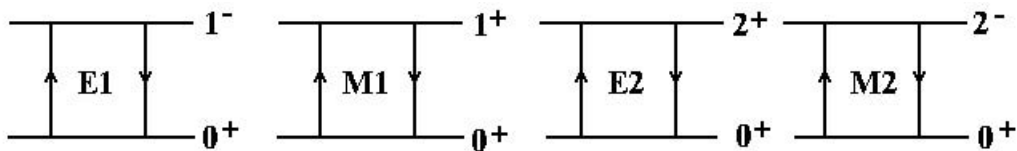
Если  $L = J$ ,  $P = (-1)^{J+1}$  - магнитные (MJ) фотоны.

Если  $L = J \pm 1$ ,  $P = (-1)^J$  - электрические (EJ) фотоны.

Правила отбора по чётности

$$P_i P_f = (-1)^J \text{ для EJ-фотонов; } P_i P_f = (-1)^{J+1} \text{ для MJ-фотонов.}$$

Так как  $J \geq 1$ , переходы  $0 \rightarrow 0$  с испусканием или поглощением одного фотона запрещены.



Особенности  $\gamma$ -излучения:

- снижение вероятности  $\gamma$ -перехода с ростом  $J_\gamma$ ,
- относительно меньше вер-ть магн. переходов по сравн с электрическими переходами при  $J_\gamma = \text{const}$ .

- Правила отбора по моменту и чётности = правила отбора по изоспину  $\Delta J = 0, \pm 1$ .

### Эффект Мессбауэра

Непределённость энергии возбужденных состояний (из-за соотношения неопределённости) приводит к немонахроматическому спектру  $\gamma$ -излучения, испускаемого при переходе ядра из возбужденного в основное состояние. Эта немонахроматичность – естеств. ширина  $\Gamma$  линии испускания  $\gamma$ -излучения,  $\Gamma \sim 10^{-6} \text{ эВ}$ .

Резонансное возбуждение атомных уровней фотонами от источника из того же вещества легко наблюдается. Иначе обстоит дело для атомных ядер. Это связано главным образом с тем, что естественная ширина  $\Gamma$  ядерных уровней мала по сравнению с энергией отдачи  $R$  ядра-излучателя (источника) или ядра-поглотителя (мишени). Например, естественная ширина  $\Gamma$  первого возбужденного уровня ядра  $^{57}\text{Fe}$ , расположенного при энергии возбуждения  $E = 14.4 \text{ кэВ}$ , равна  $\hbar/\tau = 4.6 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}$  (измеренное среднее время жизни  $\tau = 98 \text{ нс}$ ), тогда как при испускании и при поглощении  $\gamma$ -квантов это ядро приобретает энергию отдачи  $R \sim E^2/(2Mc^2) \sim 0.02 \text{ эВ}$  (где  $M$  - масса атома  $^{57}\text{Fe}$ ).

Ширина линии испускания(поглощения) определяется доплеровским уширением  $D = 2\sqrt{T_R k T^\circ}$ ,  $D \approx T_R \sim 0.07 \text{ эВ}$ . Резонансное поглощение может иметь место только в том случае, когда энергия отдачи ядра  $R$  меньше ширины ядерного уровня  $\Gamma$ .

Мессбауэр предположил, что при *малой энергии перехода* и *низкой температуре* (по сравнению с дебаевской темпю кристалла), импульс и энергия отдачи идут не на выбивание атома из узла решётки, и не на изменение энергетического состояния кристалла, а передаются упругим образом всему кристаллу в целом. При этом исчезает корреляция между импульсом и энергией, и энергия отдачи практически равна нулю, т.е. исчезает сдвиг между линией испускания и поглощения. Одновременно для этих актов излучения и поглощения должно исчезнуть и доплеровское уширение  $D$ , которое теперь будет меньше естественной ширины линии  $\Gamma$ .

За открытие излучения, рассеяния и поглощения без отдачи Мессбауэру была присуждена Нобелевская премия в 1961 году.

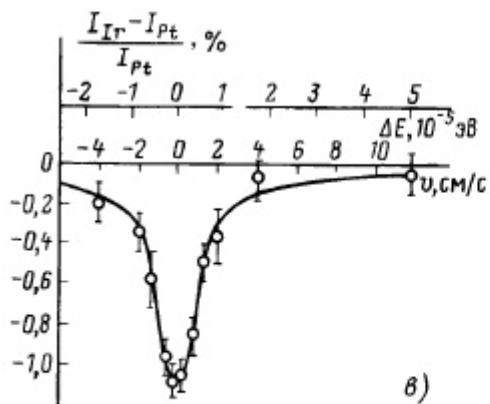
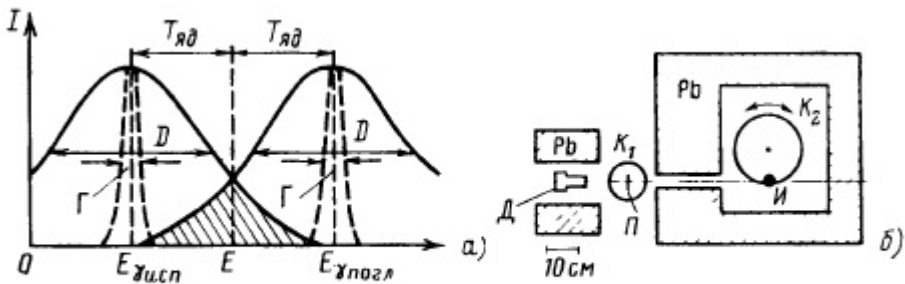


Рис. 126



## Ядро-6. Механизмы ядерных реакций.

Ядерная реакция - это процесс столкновения элементарной частицы с ядром или ядра с ядром.

Более лёгкая частица - снаряд, тяжёлая - мишень. При столкновении могут происходить различные процессы (каналы реакции). При упругом рассеянии снаряд и мишень не претерпевают никаких внутренних изменений, не появляется новых частиц. Для количественного описания используется эффективное сечение - дифференциальное ( $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ) и полное ( $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ ). Ядерное время  $\tau = 2R/v$  - время пролёта частицы через ядро.

Классификация реакций:

Если время реакции  $t \approx \tau$ , то это прямая реакция. Частица передаёт энергию одному или нескольким нуклонам и они сразу покидают ядро.

Характерное ядерное время  $\tau \approx 10^{-22}$  с. Прямые процессы идут на всех ядрах при любых энергиях снаряда.

Рассмотрим процессы однонуклонной передачи ( $d, p$ ) - реакция срыва и ( $p, d$ ) - реакция подхвата. Они обычно идут на поверхности ядра.

В реакции срыва дейтрон одним из своих нуклонов «задевает» ядро и распадается. Один нуклон захватывается ядром, а другой продолжает движение в направлении своего первоначального импульса, не взаимодействуя с ядром. Вероятность того, что остов ядра при этом не возбудится, велика.

В реакции подхвата нейтрон подхватывается с поверхности ядра пролетающим мимо протоном, оставляя вакансию (дырку) на том уровне, который он занимал. К прямым реакциям относятся также реакции ( $p, 2p$ ), ( $e, ep$ ), ( $e, en$ ) при больших энергиях налетающих частиц.

Если время реакции  $t \gg \tau$ , то реакция идёт через составное ядро. Частица  $a$  и нуклон, которому она передала энергию, «запутываются» в ядре. Энергия делится среди многих нуклонов. Через значительный промежуток времени энергия случайным образом в достаточном кол-ве концентрируется на одном нуклоне (или объекте из нескольких связанных нуклонов) и он покидает ядро. Т.о. реакция идёт в 2 этапа:  $a + A \rightarrow C^* \rightarrow B + b$ . Энергия возбуждения ядра  $E^* \approx T_a + B_a$  (в пренебрежении отдачей), где  $B_a$  - энергия отделения частицы  $a$  от ядра  $C$ . Сечение реакции через составное ядро:  $\sigma_{ab} = \sigma_{a+A \rightarrow B+b} = \sigma_{aC} W_b$ , где  $\sum_b \sigma_{ab} = \sigma_{aC}$  - сечение образования составного ядра, а  $W_b$  - вероятность его распада по каналу  $b$ . Очевидно,  $\sum_b W_b = 1$ .

## Ядро-7. Ядерные силы и их свойства.

Удельная энергия связи.  $W(A, Z)$  тем больше, чем больше  $A$ . Удобно иметь дело с так называемой удельной энергией связи (энергией связи на один нуклон)  $\varepsilon = \frac{\Delta W}{A}$ . Для разрыва химической связи (электромагнитные силы) нужна энергия в 106 раз меньше. Максимум  $\varepsilon_{max} \approx 8.8 \text{ МэВ}$  ( $A \approx 60 - {}^{58}\text{Fe} \dots {}^{62}\text{Ni}$ )

Свойства ядерного взаимодействия:

1. Из положительности значений  $\Delta W$  и  $\varepsilon$  для всех ядер следует, что ядерные силы имеют характер притяжения, которое с избытком компенсирует кулоновское расталкивание протонов.
2. Из большого значения удельной энергии  $\bar{\varepsilon} = 8 \text{ МэВ}$  следует большая интенсивность ядерного взаимодействия ( $V_{кул.расталк.} \sim 0.7 \text{ МэВ}$ ), оно превосходит и электромагнитное в  $10^3$  раз на расстояниях  $10^{-13} \text{ см}$ .
3. Из пропорционности  $\Delta W$  и  $\varepsilon$  следует свойство насыщения ядерных сил. Способность нуклона взаимодействовать не со всеми, а только с ограниченным числом нуклонов, также это связано с короткодействием.
4. Из существования  $\frac{1}{2}H$  следует зависимость ядерных сил от спина.
5. Масса  $\beta$ -стабильных ядер на 99.9% совпадает с массовым числом  $A$
6. Зарядовая независимость ядерных сил, зарядовая симметрия ядерных сил.
7. Удельная энергия связи нуклонов является мерой прочности ядра. Большие удельные энергии у четно-четных ядер, указывает на добавочное парное взаимодействие между 2 однотипными нуклонами (разная проекция), имеющие одинаковые энергии и квантовые числа.
8. Ещё более высокие  $\varepsilon$  для ядер, содержащих протонов и (или) нейтронов 2,8,20,28,50. Эти числа называются магическими. Ядро содержащее магическое число протонов и нейтронов называются дважды магическим. В модели ядерных оболочек объясняется образованием магических ядер при заполнении оболочки.

9. Для достаточно тяжелых ядер энергетически выгоден процесс  $\alpha$ -распада ( $A \approx 220$ )  $(A, Z) \rightarrow (A - 4, Z - 2) + {}^4_2\text{He}$
10. Для тяжелых ядер энергетически выгоден процесс деления на 2 одинаковых по массе ядра  $(A_1, Z_1), (A_2, Z_2)$  - осколки деления.  $A = A_1 + A_2, Z = Z_1 + Z_2$ .  $Q_{дел} = A(\bar{\varepsilon} - \varepsilon) > 0$  - энергия освобождается при делении. Аналогично для синтеза легких ядер имеем  $Q_{синт} = A(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) > 0$
11. Энергия деления уменьшается с ростом, что позволяет допустить существование радиоактивных процессов с вылетом  ${}^4\text{He}$  (кластерный распад).

# Ядро-8. Частицы и взаимодействия. Взаимодействие как обмен квантами калибровочного поля (калибровочными бозонами). Фундаментальные частицы - лептоны и кварки. Античастицы.

Ядра ( $10^{-12}$  см)  $\rightarrow$  нуклоны [и вообще адроны] (1 Фм)  $\rightarrow$  кварки и лептоны ( $< 10^{-16}$  см). Адроны состоят из 2х (мезоны) или 3х (барионы) кварков, участвуют во всех видах вз-й. Лептоны не участвуют в сильных вз-ях. Известно около 500 элементарных частиц (включая античастицы). Но всё это многообразие сводится к 12ти фундаментальным частицам (без учёта античастиц.) Кварки никогда не находятся в свободном состоянии, но их существование доказано.

Частица (элементарная):

- Объект размером  $\leq 1$  Фм ( $10^{-13}$  см)
- Объект, который нельзя расщепить на составляющие его элементы (! при распаде частицы рождаются новые. Они не явл. её составными частями)

Фундаментальные частицы ( $< 10^{-16}$ см). Спин = 1/2			
Лептоны		Кварки	
заряженные ( $Q = -e$ )	$e, \mu, \tau$	верхние ( $Q = +(2/3)e$ )	u, c, t
нейтрино ( $Q = 0$ )	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	нижние ( $Q = -(1/3)e$ )	d, s, b

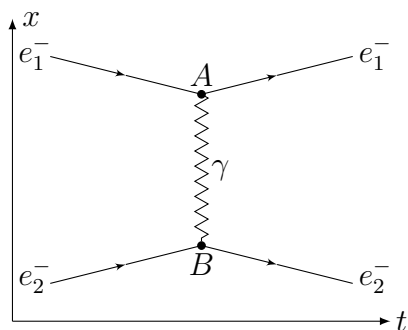
Т.о. всё многообразие мира сводится к фундаментальным фермионам, которые взаимодействуют посредством фундаментальных (калибр.) бозонов.

Взаимодействие	$\alpha$	Частицы	Кванты	Теория
Сильное	1	кварки (адроны)	$g$ (8 шт.)	КХД
ЭМ	1/137	заряж. частицы	$\gamma$	КЭД, ЭСМ
Слабое	$10^{-6}$	лептоны и кварки	$W^\pm, Z^0$	ЭСМ
Грав.	$10^{-38}$	все частицы	$G$	ОТО

Бозон	$I(J^{PC})$	$M$ , ГэВ	$\tau_{63}$ , сек	$r_{63}$ , см
глюон	$0(1^-)$	0	$10^{-21} - 10^{-23}$	$\approx 10^{-13}$
фотон	$0, 1(1^{--})$	$< 6 \cdot 10^{-26}$	$\approx 10^{-18}$	$\infty$
$W^\pm$	$J = 1$	80	$\approx 10^{-10}$	$\approx 10^{-16}$
$Z^0$	$J = 1$	91	$\approx 10^{-10}$	$\approx 10^{-16}$
гравитон	$J = 2$	0	$\infty$	$\infty$

Теории взаимодействий: КХД - квантовая хромодинамика, КЭД - квантовая электродинамика (наиболее совершенная из всех), ЭСМ - электро-слабая модель (объединяет электромагнитное и слабое взаимодействия, включает в себя КЭД, подтверждена экспериментально). Всё вместе - стандартная модель.

Все фундаментальные бозоны, кроме гравитона, обнаружены.



Взаимодействие частиц осуществляется так называемым квантом поля (калибровочным бозоном). Рассмотрим фотон.  $e_1^-$  (электрон) испускает фотон,  $e_2^-$  поглощает. Энергия не сохраняется (это очевидно при испускании фотона первоначально покоившимся электроном). Это не обычный (свободный) фотон, а виртуальный. Кратковременное несохранение энергии возможно из-за соотношения неопределённости. За время  $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$  нарушение закона сохранения энергии на величину  $\Delta E$  ненаблюдаемо. За это время фотон поглощается и баланс восстанавливается. Виртуальный фотон может пройти расстояние  $c\Delta t$ . Чем дальше он уходит, тем слабее сила взаимодействия - меньше  $\Delta E$ . Т.о., как и следовало ожидать, сила кулоновского взаимодействия убывает с расстоянием.

Константа взаимодействия  $\alpha = \frac{(\text{заряд})^2}{\hbar c}$ . Сила и энергия взаимодействия 2х частиц  $\sim \alpha$ , вероятность вз-я  $\sim \alpha^2$ . В формуле под зарядом понимается эл-кий ( $Z^2e$ ) для э/м вз-я, масса (протона) для гравитац-го, глюонный заряд для сильного etc. Точки, в которых происходит испускание или поглощение кванта поля называются узлами (А и В на диаграмме). Амплитуда  $A$  вероятности процесса, представляемого узлом из 3х линий,  $A_i \sim \sqrt{\alpha_i}$  (ещё амплитуда зависит от степени нарушения баланса энергии и полной энергии взаимодействия). Если узлов несколько, то общая амплитуда  $A = \prod_i A_i$ . Сама вероятность процесса определяется дифференциальным эффективным сечением, которое  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2$ .

## *Античастицы*

При переходе от частицы к античастице меняют знаки все аддитивные квантовые числа ( $Q, B, L_e, L_\mu, L_\tau, I_3, S, C, V, T$ ), а также магнитный момент, т.к. он  $\sim Q$ . Не меняются масса, спин, изоспин  $I$ , время жизни и способ распада (с заменой всех частиц на античастицы - зарядовое сопряжение). Чётности фермиона и антифермиона противоположны, чётности бозона и антибозона совпадают. Если все аддитивные квантовые числа равны 0, то частица и античастица тождественны (фотон ( $\gamma$ ),  $\pi^0$ -мезон,  $Z$ -бозон). Такие частицы наз. истинно нейтральными. На диаграммах Фейнмана линии античастиц направлены в сторону уменьшения времени. Первая открытая античастица - позитрон (антиэлектрон). Потом предсказали и обнаружили антипротон (понадобились ускорители протонов на 6 ГэВ):  $p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p$ .

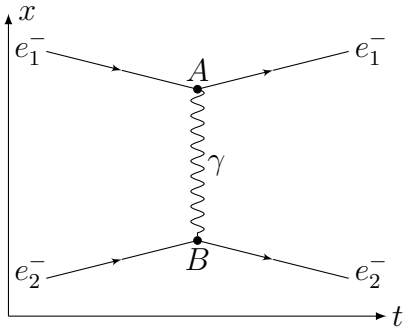
### *Законы сохранения*

В сильных вз-ях соблюдаются все законы сохранения. В э/м не сохраняется Изоспин (но сохраняется его проекция). В слабых вз-ях нарушаются многие з-ны. Подробнее см. вопрос 12.

## Ядро-9. Электромагнитное взаимодействие.

В электромагнитном взаимодействии участвуют заряженные частицы. Принято в качестве константы, характеризующей взаимодействие брать безразмерную величину  $\alpha$ . Для э/м вз-я  $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ .

Рассмотрим э/м вз-е с помощью диаграмм Фейнмана.



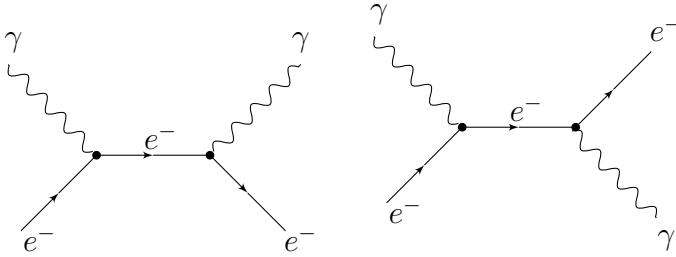
Рассмотрим э/м вз-е 2х электронов, летящих навстречу друг другу. Оно осуществляется фотоном: один эл-н ( $e_1^-$ ) испускает фотон в узле А, другой ( $e_2^-$ ) поглощает в узле В. Это сопровождается изменением импульса. В узле энергия не сохраняется (это очевидно при испускании фотона первоначально покоившимся эл-ном). Т.о. это не обычный (свободный) фотон, а виртуальный. Кратковременное несохранение энергии возможно из-за соотн. неопред-ти. За время  $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$  нарушение закона сохранения энергии на величину  $\Delta E$  ненаблюдаемо. За это время фотон поглощается и баланс восстанавливается. Виртуальный фотон может пройти расстояние  $c\Delta t$ . Чем дальше он уходит, тем слабее сила взаимодействия - меньше  $\Delta E$ . За исключением з-на сохр. энергии в узлах выполняются все з-ны сохр., присущие данному вз-ю. Например, сохраняется момент кол-ва движения. При этом для виртуальной частицы, кот. соответствует свободная частица со спином  $J$ , возможны спины  $J, J - 1, \dots, 1/2$  или 0. У фотона спин 1, следовательно для виртуального фотона возможны 1 и 0.

С помощью диаграмм Фейнмана можно написать (вообще говоря, комплексную) амплитуду вероятности процесса. В узле из трёх линий она пропорциональна  $\sqrt{\alpha}$ . В диаграмме с  $N$  узлами амплитуда вер-ти есть произведение амплитуд во всех узлах

$$A = \prod A_i = \prod \sqrt{\alpha_i}.$$

Сама вероятность процесса определяется дифференциальным эффективным сечением, которое равно квадрату модуля амплитуды

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2$$



*Эффект Комптона* - рассеяние фотона на свободном эл-не. Диаграммы низшего порядка (т. е. с наименьшим числом узлов) - двухузловые. Возможны два типа (сначала поглощение, потом испускание (1) и наоборот (2)). В обоих случаях амплитуда вер-ти  $A_1 = A_2 \sim (\sqrt{\alpha_e})^2 = \alpha_e$ . Т.о. амплитуда вер-ти Комpton-эффекта с учётом двухузловых диаграмм  $A = A_1 + A_2$ . Вероятность (диф. сечение):  $(\frac{d\sigma}{d\Omega}) = |A|^2 \sim \alpha_e^2 \sim e^4$ .

Если вместо эл-на во вз-ии участвует объект с зарядом  $Ze$ , то он создаст вокруг себя облако вирт. фотонов в  $Z$  раз плотнее, т. е. амплитуда в таком узле будет  $Z\sqrt{\alpha_e}$ .

При увеличении числа узлов на 2 (это минимальное число узлов, на которое можно увеличить диаграмму процесса, т.к. добавление узла, где возникает вирт. частица должно сопровождаться добавлением узла, где она исчезает) уменьшает вероятность э/м процесса примерно в  $(1/\alpha_e)^2 \sim 104$  раз. Поэтому с большой точностью можно ограничиться только двухузловыми диаграммами.



# Ядро-10. Сильное взаимодействие. Кварковая структура адронов. Цветовой заряд кварков. Глюоны.

адроны	спин	число кварков	барионный заряд В
барионы	полуцелый	3	1
мезоны	целый или 0	2 (кварк + антикварк)	0

Адроны - это частицы, участвующие в сильных взаимодействиях. Их около 450. Они неточечны и имеют размер  $\sim 1 \text{ Фм}$ . Кварковая модель позволила классифицировать адроны. Кварки обладают дробными электрическим и барионным зарядами!

Правило Накано-Нишиджимы-Гелл-Манна - связь между квантовыми числами адрона.

$$Q = I_3 + \frac{B + s + c + b + t}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

КВАРКИ						
Характеристика	d	u	s	c	b	t
Q	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3
B	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
I	1/2	1/2	0	0	0	0
I3	-1/2	+1/2	0	0	0	0
s	0	0	-1	0	0	0
c	0	0	0	+1	0	0
b	0	0	0	0	-1	0
t	0	0	0	0	0	+1
$mc^2$	3-9 МэВ	1-5 МэВ	75-170 МэВ	1.1-1.4 ГэВ	4.04.4 ГэВ	174±5 ГэВ

Все аддитивные квантовые числа, присущие сильному взаимодействию, привязаны к конкретным кваркам. Изоспином обладают кварки d и u (down и up - направление изоспина, т.е. знак Зей проекции). По кварковому составу адрона легко определить его квантовые числа. Барионы состоят из 3х кварков ( $q_i q_j q_k$ ), антибарионы - из 3х антикварков ( $\bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k$ ). Кварковая структура мезона -  $q_i \bar{q}_j$ , соответствующего антимезона -  $\bar{q}_i q_j$ .

Трудности простой кварковой теории:

- Существуют частицы, состоящие из 3х тождественных кварков, спины кот. ориентированы одинаково (напр., резонанс  $\Delta^- = ddd$ ) - нарушение принципа Паули?

- Комбинации типа  $qqq$ ,  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ ,  $q\bar{q}$  реализуются, а  $qq$ ,  $\bar{q}\bar{q}$ ,  $qq\bar{q}$ ,  $q\bar{q}\bar{q}$  - нет. И отдельных кварков не наблюдали. Почему?

У кварков есть цвет - новое квантовое число. Бывают кварки 3х цветов - R,G,B. У антикварков - антицвета. Тогда принцип Паули восстанавливается, если приписать кваркам разные цвета. Наблюдаемые в природе адроны абсолютно бесцветны (белые). В фермионах (и антифермионах) кварки разных цветов образуют белый цвет. Для мезонов антицветной кварк обесцвечивает соответствующий цветной. Т.о. введение цвета устраняет все трудности.

Глюон. Сильное взаимодействие осуществляется обменом безмассовой электрически нейтральной частицей со спином 1, отрицательной чётностью и нулевым Изоспином - глюоном (от glue). Эта частица «склеивает» кварки в адронах. Испуская или поглощая глюон, кварк может поменять или сохранить цвет. Должен выполняться закон сохранения цвета. При изменении цвета (напр.  $R \rightarrow G$ ) для узлов можно записать:  $R = g + G$  и  $G + g = R$ . Отсюда  $g = R\bar{G}$ . Если цвет не изменялся, то цветовая структура глюона - одна из 2х линейных комбинаций бесцветных сочетаний (вид которых получается из соображений симметрии и требования ортонормированности глюонных состояний). Итого есть 8 видов глюонов:

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}).$$

(Есть ещё одна линейная комбинация, но она абсолютно бесцветна и не может выступать в роли переносчика цвета).

## Ядро-11. Слабое взаимодействие и процессы, им обусловленные. Слабые распады кварков и лептонов. Нейтрино.

Константа слабого взаимодействия  $\alpha_w \sim 10^{-6}$ . Радиус слабых сил  $\sim 10^{-16}$  см. Слабое вз-е осуществляется обменом промежуточными бозонами  $W^\pm, Z$ . В слабых вз-ях участвуют кварки и лептоны (спин лептонов 1/2). В слабых вз-ях нарушаются многие законы сохранения.

Лептон	Эл. заряд, ед. е	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	Основной тип распада
$e^-$	-1	+1	0	0	стабилен
$\nu_e$	0	+1	0	0	стабильно
$\mu^-$	-1	0	+1	0	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
$\nu_\mu$	0	0	+1	0	стабильно
$\tau^-$	-1	0	0	+1	$h + \nu_\tau, e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau, \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$
$\nu_\tau$	0	0	0	+1	стабильно

Ключевой процесс в звёздах (и Солнце), открывающий цепочку ядерных реакций:  $p + p \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e$  - слабое вз-е.

Один из признаков слабого вз-я - появление нейтрино ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) или антинейтрино. В современной Стандартной модели нейтрино считаются безмассовыми. Лептонный заряд (см. таблицу) был введён для объяснения нетождественности нейтрино и антинейтрино, для объяснения невозможности реакции  $\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^-$  (притом, что идёт реакция  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ). Такая реакция нарушает сохранение лептонного заряда, так как у античастиц заряды противоположны частицам. В слабых вз-ях не сохраняются чётность, изоспин, проекция изоспина, странность s, очарование c, топ t и боттом b (при слабых распадах адронов хотя бы одно квантовое число обязательно не сохраняется) (см. вопрос 12).

Кванты слабого взаимодействия:

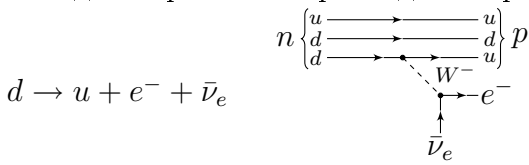
$W^\pm$  - основные моды распада:  $l\nu_l$ , адроны

$Z$  - основные моды распада:  $l^-l^+$ , адроны.

Слабые распады идут в тех случаях, когда запрещены сильные или э/м. Они могут быть 3х типов.

- Лептонные (безадронные):  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ ;
- Лептон-адронные (полулептонные):  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ;
- Адронные (безлептонные):  $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-, \Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ .

Распад нейтрона - это распад d-кварка:



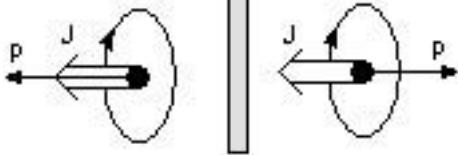
Это единственный способ распада нейтрона. Пользуясь законом сохранения электрического заряда, можно выписать процессы, в которых появляются или исчезают заряженные кванты слабого поля  $W^\pm$ . Эти процессы называются «заряженный слабый ток». Слабые токи могут быть кварковыми (если кварковые вилки) или лептонными (если лептонные вилки). Всего получается 12 вариантов слабых токов для  $W^-$ :  $q\bar{q}'$  - кварковые и  $l\bar{\nu}_l$  - лептонные. Для  $W^+$  нужно заменить частицы античастицами.

Существуют также нейтральные слабые токи, связанные с электрически нейтральным бозоном  $Z$ . Такие токи не меняют электрических зарядов и кварковых квантовых чисел. Всего 12 нейтральных токов:  $q\bar{q}$  - кварковые и  $\bar{l}l, \bar{\nu}_l\nu_l$  - лептонные.

## Ядро-12. Симметрии и законы сохранения. Объединение взаимодействий.

Законы сохранения определяют правила отбора, согласно которым процессы с частицами, приводящие к нарушению законов сохранения, не могут осуществляться в определенных типах взаимодействий. Установлено, что каждый закон сохранения связан с какой-либо симметрией в окружающем нас мире (теорема Нетер). Так законы сохранения энергии и импульса связаны с однородностью времени и пространства. Закон сохранения момента количества движения связан с симметрией пространства относительно вращений. Законы сохранения зарядов связаны с симметрией физических законов относительно специальных преобразований, описывающих частицы.

Хар-ка	сильное	э/м	слабое
Аддитивные з-ны сохр.			
Электр. заряд $Q$	+	+	+
Энергия $E$	+	+	+
Импульс $P$	+	+	+
Момент импульса $J$	+	+	+
Барионный заряд $B$	+	+	+
Лептонные заряды $L$	+	+	+
Странность $S$	+	+	-
Очарование $C$	+	+	-
Bottom $B$	+	+	-
Топ $T$	+	+	-
Изоспин $I$	+	-	-
Проекция изоспина $I_3$	+	+	-
Мультипликативные з-ны сохр.			
Пространственная чётность $P$	+	+	-
Зарядовая чётность $C$	+	+	-
Временная чётность $T$	+	+	(+)
Комбинированная чётность $CP$	+	+	-
СРТ-чётность $CPT$	+	+	+



*P*-симметрия. Пространственная чётность сохраняется в сильных и  $\varepsilon/m$  вз-ях. Это означает, что состояния систем, участвующих в таких вз-ях можно хар-ть определённой чётностью - положительной ( $\psi(-r) = \psi(r)$ ) или отрицательной ( $\psi(-r) = -\psi(r)$ ). Если чётность не сохраняется, то состояние  $\psi$  можно представить как смесь состояний с + и - чётностью.  $\psi = a\psi_+ + b\psi_-$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ .  $b/a$  - мера несохранения чётности. Обнаружение нарушения чётности в слабых вз-ях - 2 способа распада К-мезона:  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ . В первом случае чётность К должна быть положит., во втором - отрицат. Но его чётность = -1.

Пространственная инверсия ( $r \rightarrow -r$ ) эквивалентна последовательным отражению в плоскости  $xOy$  (зеркальному отображению) и повороту на 180 вокруг оси  $Oz$ . Инвариантность физ. законов к поворотам несомненна. Зеркальное отражение? Импульс меняет направление, а спин нет (правый винт, отразившись, остаётся правым).

Спиральность  $h = \frac{\vec{J}\vec{p}}{Jp}$ . Правополяризованная частица - спин направлен по импульсу ( $h = +1$ ). левополяризованная - против импульса ( $h = -1$ ). Спиральность нейтрино всегда отрицательна:  $\nu_e = |L_e = +1, h = -1\rangle$ . Такой частицы:  $\hat{P}\nu_e = |L_e = -1, h = +1\rangle$  - не существует - ещё доказательство отсутствия инвариантности.

Зарядовая чётность. Операция зарядового сопряжения  $\hat{C}|частица\rangle = |античастица\rangle$  и  $\hat{C}|античастица\rangle = |частица\rangle$ . Зарядовая симметрия означает, что если существует к-л процесс с участием частиц, то при замене их на античастицы процесс также существует и с той же вероятностью.  $\hat{C}\nu_e = |L_e = -1, h = -1\rangle$  - такой частицы тоже не существует. Т.о в слабых вз-ях нарушается и *C*, и *P* инвариантность. А вот *CP*-преобразование даёт существующую частицу:  $\hat{C}\hat{P}\nu_e = |L_e = -1, h = +1\rangle = \bar{\nu}_e!$  Но истинно нейтральные долгоживущие каоны  $K_L^0$  нарушают *CP*-инв-ть (распады  $K_L^0 \rightarrow \pi^-e^+\nu_e$  и  $K_L^0 \rightarrow \pi^+e^-\bar{\nu}_e$  идут с разной вероятностью). Т-преобразование:  $t \rightarrow -t$ . Оно меняет знак у импульса и момента кол-ва движения. Сл-вие *T*-инвар-ти - одинаковая вер-ть прямого и обратного процессов.

СРТ-теорема: наш мир и мир, полученный из него путём пространственной инверсии, зарядового сопряжения и обращения времени, идентичны. Или более умно: произведение  $3\pi$  операций С, Р и Т коммутирует практически с любым мыслимым гамильтонианом:  $[СРТ, H] = 0$ .

*Объединение вз-ий.* 1. Объединение электрических и магнитных сил (Максвелл). 2. Объединение э/м и слабых сил (Вайнберг, Салам, Глэшоу). Дальше?

Интенсивности (вер-ти) разл. вз-ий характеризуются безразмерными константами ?. Но эти константы на самом деле зависят от энергии. Они сбегаются в одну точку (примерно  $1/40$ ) при энергиях  $10^{15} - 10^{16} \text{ ГэВ}$ . На этом основана надежда создать теорию, объединяющую сильно, слабое и э/м вз-я. Простейшая версия такой теории (минимальная  $SU(5)$ -модель) добавляет к 4м известным бозонам (W, Z, фотон, глюон) ещё 2 бозона - переносчика сил Великого объединения (X и Y). Т.о. получаем «полный набор» фундаментальных частиц - 6 кварков + 6 лептонов + 6 бозонов. X и Y бозоны участвуют в процессах, не сохраняющих барионный и лептонный заряды. Одним из важнейших предсказаний теории великого объединения явл. распад протона.

# Ядро-13. Космические лучи. Их состав и происхождение. Нуклеосинтез во Вселенной

Космические лучи были открыты в 1912 г. В. Гессом. Различают первичные космические лучи - космические лучи до входа в атмосферу и вторичные космические лучи, образовавшиеся в результате процессов взаимодействия первичных космических лучей с атмосферой Земли.

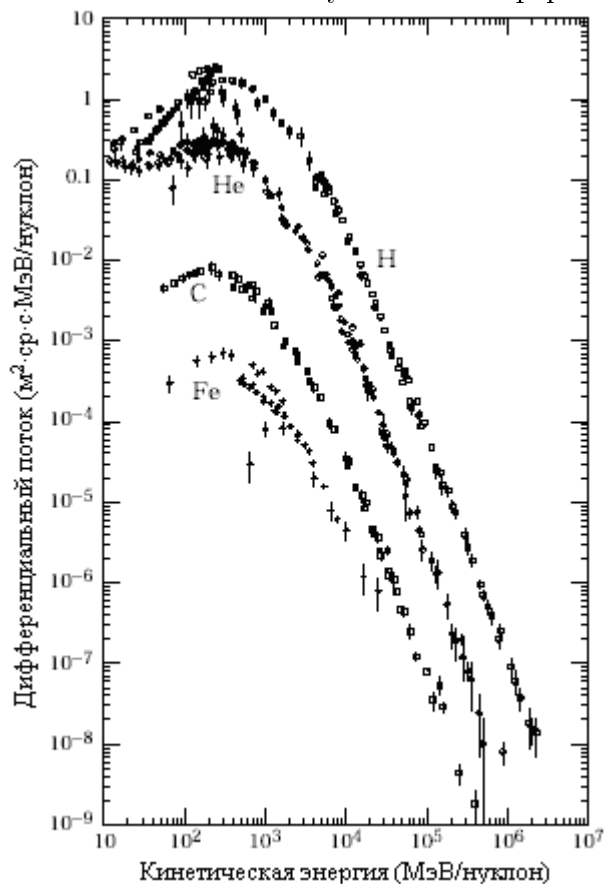


Рис. 1. Основные компоненты первичных космических лучей



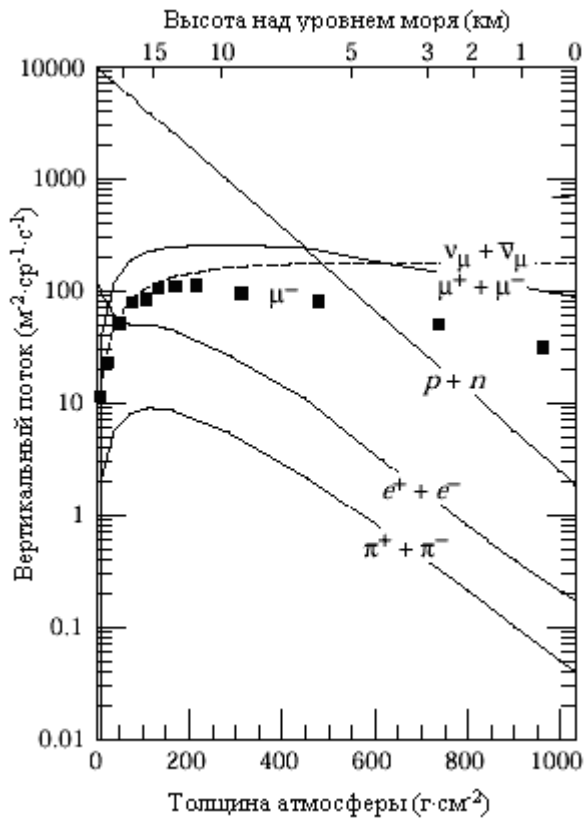


Рис. 2. Вертикальные потоки космических лучей в атмосфере.

За исключением протонов и электронов на больших высотах, все остальные частицы образуются в результате взаимодействия первичных космических лучей с атмосферой. Точками показаны результаты измерений отрицательных мюонов с энергией  $> 1$  ГэВ. Характеристики космических лучей до входа в атмосферу (первичные космические лучи)

	Галактические космические лучи	Солнечные космические лучи
Поток	$\sim 1 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$	Во время солн. вспышек может достигать $\sim 10^6 \text{ см}^{-2}$
Состав	1. Ядерная компонента - $\sim 90\%$ протонов, $\sim 10\%$ ядер гелия, $\sim 1\%$ более тяжелых ядер 2. Электроны ( $\sim 1\%$ от числа ядер) 3. Позитроны ( $\sim 10\%$ от числа электронов) 4. Антиадроны ( $< 1\%$ )	98 – 99% протоны, $\sim 1.5\%$ ядра гелия
Диапазон энергий	106 - 1021 эВ	105 - 1011 эВ

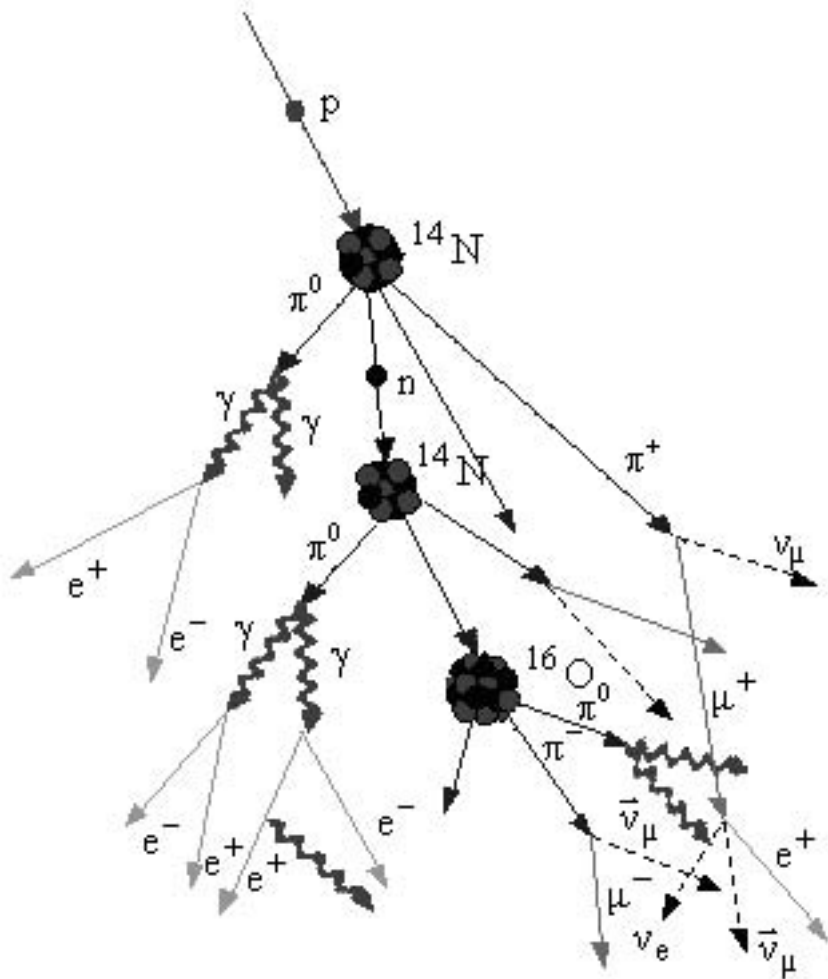


Рис. 3. Широкий атмосферный ливень

В результате взаимодействия с ядрами атмосферы первичные космические лучи (в основном протоны) создают большое число вторичных частиц - пионов, протонов, нейтронов, мюонов, электронов, позитронов и фотонов. Таким образом вместо одной первичной частицы возникает большое число вторичных частиц, которые делятся на адронную, мюонную и электронно-фотонную компоненты. Такой каскад покрывает большую территорию и называется широким атмосферным ливнем.

В одном акте взаимодействия протон обычно теряет ~ 50% своей энергии, а в результате взаимодействия возникают в основном пионы. Каждое последующее взаимодействие первичной частицы добавляет в каскад по-

вые адроны, которые летят преимущественно по направлению первичной частицы, образуя адронный кор ливня.

Образующиеся пионы могут взаимодействовать с ядрами атмосферы, а могут распадаться, формируя мюонную и электронно-фотонную компоненты ливня. Адронная компонента до поверхности Земли практически не доходит, превращаясь в мюоны, нейтрино и  $\gamma$ -кванты.

$$\begin{aligned}\pi^0 &\rightarrow 2\gamma, \\ \pi^+ &\rightarrow \mu^+ \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

Мюоны в свою очередь могут распадаться

$$\begin{aligned}\mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.\end{aligned}$$

Образующиеся при распаде нейтральных пионов  $\gamma$ -кванты вызывают каскад электронов и  $\gamma$ -квантов, которые в свою очередь образуют электрон-позитронные пары. Заряженные лептоны теряют энергию на ионизацию и радиационное торможение. Поверхности Земли в основном достигают релятивистские мюоны. Электронно-фотонная компонента поглощается сильнее.

Один протон с энергией  $> 10^{14}$  эВ может создать  $10^6 - 10^9$  вторичных частиц. На поверхности Земли адроны ливня концентрируются в области порядка нескольких метров, электронно-фотонная компонента - в области  $\sim 100$  м, мюонная - нескольких сотен метров.

Поток космических лучей на уровне моря примерно в 100 раз меньше потока первичных космических лучей ( $\sim 0.01$  см $^{-2}$  с $^{-1}$ ).

Основными источниками первичных космических лучей являются взрывы сверхновых звезд (галактические космические лучи) и Солнце. Большие энергии (до  $10^{16}$  эВ) галактических космических лучей объясняются ускорением частиц на ударных волнах, образующихся взрывах сверхновых. Природа космических лучей сверхвысоких энергий пока не имеет

однозначной интерпретации. На рис. 5 [ $plot E^{2.7}dN/dE$ ] показан спектр всех частиц первичных галактических лучей. В широком диапазоне энергий спектр аппроксимируется соотношением  $\frac{dN}{dE} E^{-2.7}$ . Особый интерес представляют области энергий  $10^{15} - 10^{16}$  эВ так называемое «колесо» (кnee: пик+спад) и  $10^{18} - 10^{19}$  - «лодыжка» (ankle: пик+рост), в которых наблюдаются аномалии.

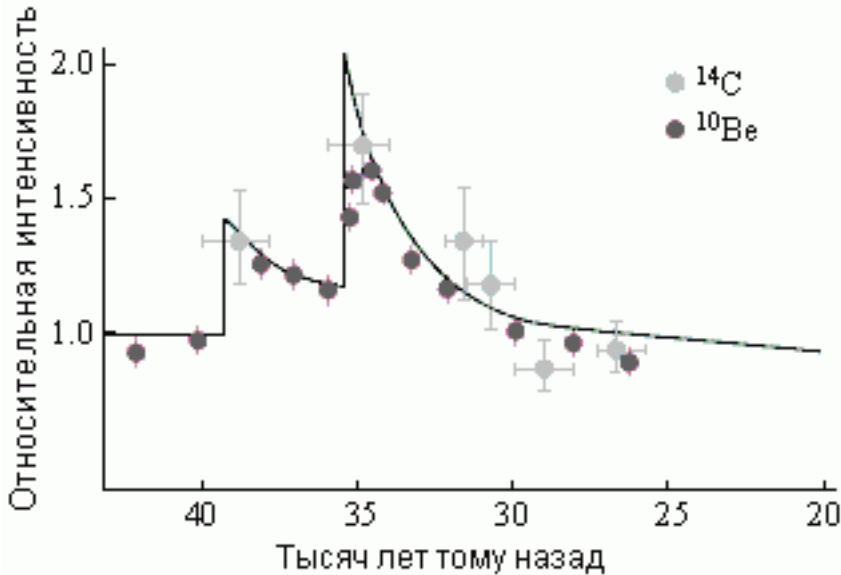


Рис. 6. Зависимость интенсивности космических лучей от времени, полученная при исследовании относительной концентрации космогенных радиоактивных изотопов  $^{14}\text{C}$ ,  $^{10}\text{Be}$ ,  $^{36}\text{Cl}$ .

Интенсивность космических лучей на больших интервалах времени была постоянна в течение  $\sim 10^9$  лет. Однако, появились данные, что 30-40 тыс. лет тому назад интенсивность космических лучей заметно отличалась от современной (см. рис.6). Пик интенсивности связывают со взрывом близкой к Солнечной системе ( $\sim 50$  пк) Сверхновой.

#### *Нуклеосинтез во Вселенной. Ядерные реакции в звездах*

1. Вещество во Вселенной в основном состоит из водорода -  $\sim 90\%$  всех атомов.
2. По распространенности гелий занимает второе место, составляя  $\sim 10\%$  от числа атомов водорода.
3. Существует глубокий минимум, соответствующий литию, бериллию и бору.
4. Сразу за этим глубоким минимумом следует максимум, обусловлен-

ный повышенной распространенностью углерода и кислорода.

5. Вслед за кислородным максимумом идет скачкообразное падение распространенности элементов вплоть до скандия ( $Z = 21, A = 45$ ).

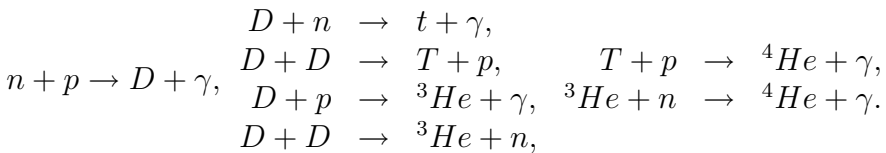
6. Наблюдается резкое повышение распространенности элементов в районе железа ("железный пик").

7. После  $A \sim 60$  уменьшение распространенности происходит более плавно.

8. Наблюдается заметное различие между элементами с четным и нечетным  $Z$ . Как правило, элементы с четным  $Z$  являются более распространенными.

9. Ряд ядер, так называемые обойденные ядра -  $^{74}\text{Se}$ ,  $^{78}\text{Kr}$ ,  $^{92}\text{Mo}$ ,  $^{96}\text{Ru}$  и др., имеют распространенность на два порядка меньшую, чем соседние ядра.

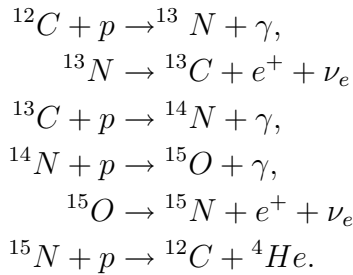
Для объяснения образования химических элементов в 1948 году Г. Гамовым была выдвинута теория Большого взрыва. Согласно модели Гамова синтез всех элементов происходил во время Большого взрыва в результате неравновесного захвата атомными ядрами нейтронов с испусканием  $\gamma$ -квантов и последующим  $\beta$ -распадом тяжелых ядер. Однако детальные расчеты показали, что в этой модели невозможно объяснить образование элементов тяжелее Li. На начальном этапе эволюции Вселенной, примерно через 100 с после Взрыва, при температуре  $\sim 10^9$  K в термоядерных реакциях образовались лишь самые легкие атомные ядра - изотопы водорода и гелия.



Согласно современным представлениям образование более тяжелых ядер на этом этапе оказывается невозможным. Более тяжелые ядра образовались лишь через миллиарды лет после Большого взрыва в процессе звездной эволюции.

В 1939 году Г. Бете впервые рассмотрел CNO-цикл как один из путей образования гелия из водорода в звездах. Особенность CNO-цикла состоит в том, что он, начинаясь с ядра углерода, сводится к последовательному добавлению 4-х протонов с образованием в конце CNO-цикла ядра  ${}^4\text{He}$ .

Последовательность реакций, первоначально предложенная Бете и К.-Ф. Вайцеккером, имеет вид



Ядро  ${}^{12}\text{C}$  в этом цикле играет роль катализатора синтеза ядер  ${}^4\text{He}$ .

1. Горение водорода, в результате этого процесса образуются ядра  ${}^4\text{He}$ .

2. Горение гелия. В результате реакции  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma$  образуются ядра  ${}^{12}\text{C}$ .

3.  $\alpha$ -процесс. В результате последовательного захвата  $\alpha$ -частиц образуются ядра  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$ ,  ${}^{24}\text{Mg}$ ,  ${}^{28}\text{Si}$ , ...

4. e-процесс. При достижении температуры  $5 \cdot 10^9$  К в звездах в условиях термодинамического равновесия протекает большое количество разнообразных реакций, в результате чего образуются атомные ядра вплоть до Fe и Ni. Ядра с  $A \sim 60$  - наиболее сильно связанные атомные ядра. Поэтому на них кончается цепочка ядерных реакций синтеза, сопровождающихся выделением энергии.

5. s-процесс. Ядра тяжелее Fe образуются в реакциях последовательного захвата нейтронов. Последующий  $\beta^-$ -распад повышает порядковый номер образующихся атомных ядер. Интервал времени между последовательными захватами нейтронов больше периодов  $\beta^-$ -распада.

6. r-процесс. Если скорость последовательного захвата нейтронов гораздо больше скорости  $\beta^-$ -распада атомного ядра, то оно успевает захватить большое число нейтронов и лишь затем, в результате последовательной цепочки  $\beta^-$ -распадов, превращается в стабильное ядро. Обычно считается, что r-процессы происходят в результате взрывов Сверхновых.

7. p-процесс. Некоторые стабильные нейтронодефицитные ядра (так называемые обойденные ядра) образуются в реакциях захвата протона, в реакциях ( $\beta^-$ , p) или в реакциях под действием нейтрино.

8. X-процесс. Механизм образования легких ядер Li, Be, B в то время не был известен. Образовавшись в звездах, эти ядра должны были интенсивно разрушаться в реакциях под воздействием протонов. Сегодня считается,

что эти ядра образуются в результате взаимодействия космических лучей с космической пылью. (Легкие ядра образуются также на дозвездной стадии эволюции Вселенной.)



## Ядро-14. Взаимодействие частиц излучения с веществом.

Что говорить конкретно не очень понятно, но прежде всего, стоит говорить о следующих двух вещах: 1) что такое дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{dN(\Omega)}{J}$$

$dN(\Omega)$  - число частиц, рассеивающихся в углы  $(\Omega + \Delta\Omega)$ ,  $J$  - плотность потока частиц,  $d\sigma$  имеет размерность площади. Например, в опытах Резерфорда:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z_\alpha Z_z e^2}{4T_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

2) нейтрино, которое очень трудно обнаружить, но всё же его обнаружили - его  $\sigma = 10^{-43} \text{ см}^2$ .

Если этого будет не достаточно, можно упомянуть про следующие вещи: Если направим на тело (монохр по энергии и по направлению) пучок частиц, то на выходе, вследствие рассеяния на атомах вещества, мы получим размытие по энергии и по углу.

Мы можем ввести следующие характеристики:  $R_0$  (путь, который проходит пучок в веществе, прежде чем число частиц упадёт вдвое) и  $R_{экстр}$  (экстраполяционная длина - путь, пройдя который, пучок исчезнет вообще). В случае поглощения излучения веществом верна следующая всем формула:  $N(x) = N(0)e^{-\mu x}$ ,  $\mu$  - коэффициент поглощения.

Для тяжелых, заряженных частиц величина удельных ионизационных потерь:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n Z^2 e^4}{m_e v^2} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e v^2}{I[1 - \beta^2]} \right) - \beta^2 \right\}, \beta = \frac{v}{c},$$

$I$  - средний потенциал возбуждения атомов тормозящего вещества;  $n$  - концентрация электронов

Радиационные потери:

$$-\frac{dd}{dx} = 4,6 \cdot 10^{-4} T \frac{Z^3 d}{A} (14,6 - \ln Z) \left[ \frac{\partial B}{\partial \text{см}} \right]$$

Фотоны и вещество:

- 1) фотоэлектрический эффект - атом поглощает фотон, возбуждается и испускает электрон.
- 2) эффект Комптона (фотон рассеивается электроном)
- 3) рождение электрон-позитронных пар (фотон превращается в электрон-позитронную пару)

## Ядро-15. Ускорители заряженных частиц.

Это чудесные устройства, позволяющие не напрягаясь получать пучки частиц с энергией от нескольких МэВ до нескольких ГэВ и интенсивностью до  $10^{16}$  частиц в секунду. Если необходимо исследовать объект размера  $d$ , то, исходя из принципа неопределённости, нужно брать импульсы не меньше  $p \geq \hbar/d$ ;  $E_{кин} p^2 / (2m_p)$ . Для примера:  $1 \text{ фм} \sim 20 \text{ МэВ}$ .

Космические лучи для этого не подходят, ибо они слишком малой интенсивности. Типичный ускоритель состоит из:

- 1) источник частиц
- 2) ускоряющее устройство
- 3) вакуумный насос

Основная деталь - ускоряющее устройст-во.

1) электростатический генератор - механическим образом создаётся разность потенциалов, ускоряющая частицы (позволяет добиться энергии 30-40 МэВ).

2) линейный ускоритель это: т.е. на пластины подаётся напряжение такое, чтобы частицы всё время ускорялись полем. Соседние пластины - разной полярности (энергия более 20 ГэВ).

3) синхротроны - частицы, поскольку они заряжены, под действием магнитного поля крутятся по кругу. Накладывая на них периодическое электрическое поле, увеличивая его частоту - разгоняем частицы (энергия более 300 ГэВ).

4) метод встречных пучков (позволяет не тратить энергию на перемещение центра масс системы): 2 пучка протонов с энергией  $\sim 20 \text{ ГэВ}$  навстречу друг другу всё равно что  $1000 \text{ ГэВ}$ .

Обычно частицы разгоняются электростатическим генератором, затем их запускают в линейный ускоритель, а затем уже в синхротрон.

## Ядро-16. Методы детектирования частиц.

1) сцинтилляционные счётчики: экран, на него напылен ZnS. Альфа-частица, проходящая вблизи от напыления - возбуждает атомы, которые в свою очередь испускают фотоны, регистрируемые фотоэлектронными умножителями.

2) полупроводниковые детекторы (аналогичны ионизационным камерам): заряженная частица рождает в веществе «ионные пары», число которых пропорционально энергии частицы и обратно пропорционально энергии образования пара, характерного для данного вещества (например, для полупроводников она порядка 3 эВ). Накладывая внешнее электрическое поле, можно заставить эти ионные пары двигаться и тем самым регистрировать их. Чтобы избавиться от шумов - всю систему охлаждают до температуры жидкого азота.

3) пузырьковая камера: в камере сильно перегретая жидкость, перемещение частицы заставляет закипать жидкость, что приводит к появлению пузырьков по пути частицы. Рабочее время - несколько миллисекунд, затем надо долго восстанавливать!

4) искровые камеры: условно говоря, есть конденсатор (один или несколько), заряженный почти до пробоя. Пролет частицы через пространство между пластинами опять-таки вызывает появление пары ионов пара, что приводит к пробую конденсатора.